自动控制原理

第二章　控制系统的数学模型

电子信息学院

主讲：张永韡　博士　讲师
email: ywzhang@just.edu.cn

主要内容

1. 引言
2. 控制系统的数学模型
   - 控制系统的微分方程
   - 非线性模型的线性化
   - 控制系统的复数域数学模型
3. 动态结构图及等效变换
   - 动态结构图的组成
   - 典型连接方式及等效变换
   - 等效移动规则
   - 结构图等效变换方法
4. 信号流图及梅逊公式
   - 信号流图的基本概念
   - 信号流图的绘制
   - 梅逊（Mason）增益公式
5. 控制系统的传递函数

建模方法

机理建模（分析法）

根据现有的物理、化学定律对系统各部分的动态进行分析和描述，并给出运动方程。

电学：基尔霍夫定律

电流定律 所有进入某节点的电流的总和等于所有离开这节点的电流的总和。

电压定律 沿着闭合回路所有元件两端的电势差（电压）的代数和等于零。

建模方法

力学：牛顿定律

第一定律 存在某些参考系，在其中，不受外力的物体都保持静止或匀速直线运动。

第二定律 施加于物体的合外力等于此物体的质量与加速度的乘积。

第三定律 当两个物体互相作用时，彼此施加于对方的力，其大小相等、方向相反。

建模方法

热力学：热力学定律

第零定律 若两个热力学系统均与第三个系统处于热平衡状态，此两个系统也必互相处于热平衡。

第一定律 物体内能的增加等于物体吸收的热量和对物体所作的功的总和.（系统经过绝热循环，其所做的功为零，因此第一类永动机是不可能的（即不消耗能量做功的机械)。

第二定律 孤立系统自发地朝着热力学平衡方向——最大熵状态——演化，同样地，第二类永动机永不可能实现。(不可能从单一热源吸取热量，使之完全变为有用功而不产生其他影响)

第三定律 热力学系统的熵在温度趋近于绝对零度时趋于定值，特别地，对于完整晶体，这个定值为零

黑箱建模（实验法）

系统辨识 给系统添加测试信号，记录输出响应，使用数学模型逼近。

神经网络 训练网络权值，最小化输出的最小二乘误差。神经网络建模可看做系统辨识的特例。

系统辨识已经形成了一门独立的学科。本章重点研究分析法。

控制理论中的系统模型

数学模型

系统内各变量之间的关系
静态 $\longrightarrow$ 各阶导数为零
动态 $\longrightarrow$ 各阶变量之间关系

数学模型的类型

时域 (t) 微分方程，差分方程，状态方程
复数域 (s) 传递函数，结构图
频率域 (ω) 频率特性

接下来...

控制系统的微分方程

线性定常系统微分方程的一般形式

$$
\begin{aligned}
& a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\
= \; & b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)
\end{aligned}
\tag{2-1}
$$

建立微分方程的一般步骤

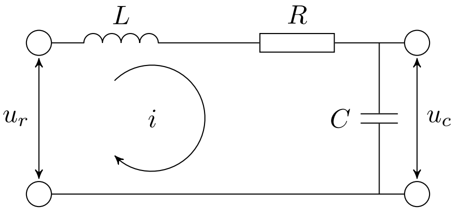
1. 确定输入量、输出量和扰动量，并根据需要引进一些中间变量。
2. 根据物理或化学定律，列出微分方程。
3. 消去中间变量后得到描述输出量与输入量 (包括扰动量) 关系的微分方程（标准形式)。

例 1 R-L-C 串连电路

由基尔霍夫定律得

$$u_r(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t)$$

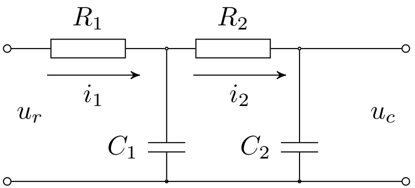
$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$



消去中间变量 $i(t)$

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

例 2 有负载效应的电路



$$u_r = \frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\,dt + i_1 R_1$$

$$\frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\,dt = i_2 R_2 + u_c$$

$$u_c = \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt$$

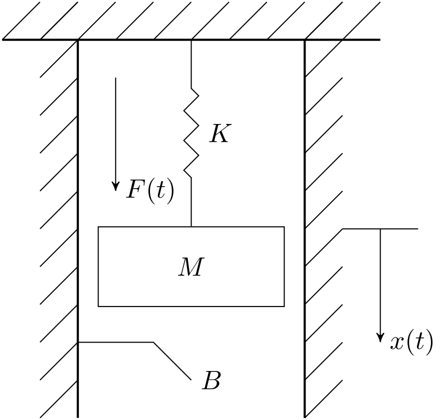
消去中间变量 i_1，i_2，整理得

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)\frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

例 3 机械位移系统

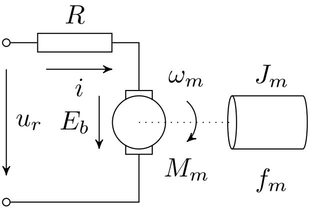
由牛顿第二定律：$f_M(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$
阻尼器模型：$f_B(t) = B\frac{dx(t)}{dt}$
由胡克定律：$f_K(t) = Kx(t)$

$$
\begin{aligned}
F(t) &= f_M(t) + f_B(t) + f_K(t) \\
&= M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t)
\end{aligned}
$$



例 4 电枢控制式直流电动机

电枢回路	$u_r = Ri + E_b$	克希霍夫
电枢反电势	$E_b = c_e \cdot \omega_m$	楞次定律
电磁力矩	$M_m = c_m i$	安培定律
力矩平衡	$J_m\dot{\omega}_m + f_m\omega_m = M_m$	牛顿定律
	$\omega_m = \dot{\theta}$	



消去中间变量 i，M_m，E_b 可得：

$$\begin{aligned} T_m\dot{\omega}_m + \omega_m &= K_m u_r \\ T_m\ddot{\theta}_m + \dot{\theta}_m &= K_m u_r \end{aligned} \quad \begin{cases} T_m = J_m R/(R\cdot f_m + c_e\cdot c_m) & \text{电机时间常数} \\ K_m = c_m/(R\cdot f_m + c_e\cdot c_m) & \text{电机传递系数} \end{cases}$$

接下来...

非线性模型的线性化

$$\ddot{c} + \dot{c} = \ddot{r} + r \longrightarrow \text{线性}$$

$$c\ddot{c} + \dot{c} = \ddot{r} + r \longrightarrow \text{非线性}$$

在给定工作点附近将非线性模型展开为泰勒级数

$$y = f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x - x_0)^2 + \cdots$$

略去 2 次及高阶项，得到线性化方程

$$y = y_0 + K(x - x_0)$$

其中

$$y_0 = f(x_0), \qquad K = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

接下来...

控制系统的复数域数学模型

传递函数：经典控制的基础

$$r(t) \longrightarrow \boxed{\ddot{c} + \dot{c} = \ddot{r} + r} \longrightarrow c(t)$$

定义

零初始条件下输出的拉氏变换比输入拉氏变换。

典型外作用信号

- 阶跃 $f(t) = R \cdot 1(t)$
- 斜坡 $f(t) = Rt$
- 脉冲 $f(t) = \lim_{t_0 \to 0} \frac{A}{t_0}[1(t) - 1(t - t_0)]$

复数域下，理想脉冲信号表示为 $\delta(t)$，且有：

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

微分方程与传递函数

回忆线性定常微分方程的一般形式:

$$
\begin{aligned}
& a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) \\
= & \; b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t)
\end{aligned}
$$

零初始条件下，对上式两边取拉氏变换，得:

$$
\begin{aligned}
& (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n) C(s) \\
= & \; (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m) R(s)
\end{aligned} \tag{2-2}
$$

该系统的传递函数定义为输出与输入之比:

$$
G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \tag{2-3}
$$

传递函数的零极点形式

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \\ = \frac{N(s)}{D(s)} &= \frac{b_0 (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_0 (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \end{aligned} \tag{2-4}$$

$s = z_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是 $N(s) = 0$ 的根，称为传递函数的零点；
$s = p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $D(s) = 0$ 的根，称为传递函数的极点。

传递函数性质

- TF 与信号无关，只取决于系统的结构和参数，与系统的输入和输出位置有关
- 仅适用于线性定常系统
- 分母阶次 n 大于分子阶次 m，$n > m$
- 分母中 s 的最高阶次 n 即为系统的阶次
- 不能反映非零初始条件的运动
- 由相应零极点组成
- 只反映但输入与单输出的关系，不反映内部（多入多出系统使用 TF 矩阵）
- 特征多项式 $D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$
- 特征方程 $D(s) = 0$
- $D(s) = 0$ 的根称为特征根。

微分方程求传递函数举例

由页面1，所得系统微分方程为:

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

拉氏变换得：$LCs^2U_c(s)+RCsU_c(s)+U_c(s)=U_r(s)$，整理得

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

由页面1，所得系统微分方程为

$$R_1R_2C_1C_2\frac{d^2u_c}{dt^2}+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)\frac{du_c}{dt}+u_c=u_r$$

拉氏变换得并整理得:

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

微分方程求传递函数举例

由例 3，所得系统微分方程为：

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2}+B\frac{dx(t)}{dt}+Kx(t)=F(t)$$

拉氏变换并整理得：

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+Bs+1}$$

由例 4，所得系统微分方程为

$$T_m\dot{\omega}_m+\omega_m=K_mu_r \quad 或 \quad T_m\ddot{\theta}_m+\dot{\theta}_m=K_mu_r$$

拉氏变换得并整理得：

$$\frac{\Omega_m(s)}{U_r(s)}=\frac{K_m}{T_ms+1} \quad 或 \quad \frac{\Theta_m(s)}{U_r(s)}=\frac{K_m}{s(T_ms+1)}$$

典型环节的数学模型

1）比例环节

其输出量和输入量的关系，

$$y(t) = Kr(t)$$

式中 K 为环节的放大系数，为常数。传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = K$$

特点： 输出与输入量成比例，无失真和时间延迟。

实例： 电子放大器，齿轮，电阻 (电位器) 等。

典型环节的数学模型

2）惯性环节

微分方程式表示

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t)$$

式中 T 为环节的时间常数。传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

特点： 对突变的输入，其输出不能立即发现，输出无振荡。

实例： RC 网络，直流伺服电动机的传递函数也包含这一环节。

典型环节的数学模型

3）积分环节

微分方程式表示

$$y(t) = \int r(t)\,dt$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s}$$

特点： 输出量与输入量的积分成正比例，当输入消失，输出具有记忆功能。

实例： 模拟计算机中的积分器。

典型环节的数学模型

4）微分环节

是积分的逆运算，微分方程式表示

$$y(t) = \tau \frac{dr(t)}{dt}$$

式中 τ 为环节的时间常数，传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \tau s$$

特点： 输出量正比输入量变化的速度，能预示输入信号的变化趋势。

实例： 测速发电机输出电压与输入角度间的传递函数即为微分环节。

典型环节的数学模型

5）振荡环节：

二阶微分方程式来表示

$$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=r(t)$$

传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$$

特点： 环节中有两个独立的储能元件，并可进行能量交换。

实例： RLC 电路的输出与输入电压间的传递函数。

典型环节的特点

- 环节：具有相同形式传递函数的元部件的分类。
- 不同的元部件可以有相同的传递函数;
- 若输入输出变量选择不同，同一部件可以有不同的传递函数;
- 任一传递函数都可看作典型环节的组合，即传递函数的典型环节形式。

例如:

$$G(s)=\frac{K(2s+1)}{s^{v}(Ts+1)(\tau^{2}s^{2}+2\epsilon\tau s+1)}$$

结构相似系统

许多表面上看来似乎毫无共同之处的控制系统，其运动规律可能完全一样，可以用一个运动方程来表示，称它们为结构相似系统。
例 1 的 RLC 电路和例 3 机械平移系统就可以用同一个数学表达式分析，具有相同的数学模型。

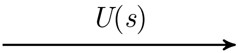
$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2}+B\frac{dx(t)}{dt}+Kx(t)=F(t)$$

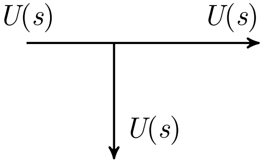
接下来...

动态结构图的组成

1、信号线：有箭头的直线，箭头表示信号传递方向。



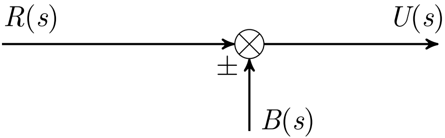
2、引出点：信号引出或测量的位置。



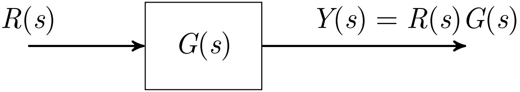
从同一信号线上引出的信号，
数值和性质完全相同

动态结构图的组成

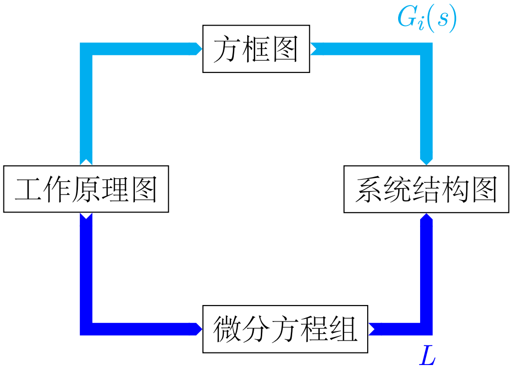
3、综合点：对两个或两个以上的信号进行代数运算，“＋”表示相加，常省略，“－”表示相减。



4、方框：表示典型环节或其组合，框内为对应的传递函数，两侧为输入、输出信号线。



动态结构图的建立



例 5 ：有负载效应的 RC 网络

1）由微分方程得到规范的因果关系

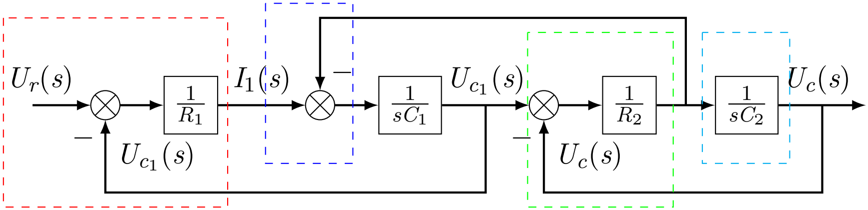
$$i_1(t) = \frac{u_r(t)-u_1(t)}{R_1} \Longrightarrow [U_r(s) - U_{c_1}(s)]\frac{1}{R_1} = I_1(s)$$

$$u_1(t) = \frac{1}{C_1}\int(i_1(t) - i_2(t))\,dt \Longrightarrow [I_1(s) - I_2(s)]\frac{1}{sC_1} = U_1(s)$$

$$i_2(t) = \frac{u_1(t)-u_C(t)}{R_2} \Longrightarrow [U_1(s) - U_C(s)]\frac{1}{R_2} = I_2(s)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C_2}\int i_2(t)\,dt \Longrightarrow I_2(s)\frac{1}{sC_2} = U_C(s)$$

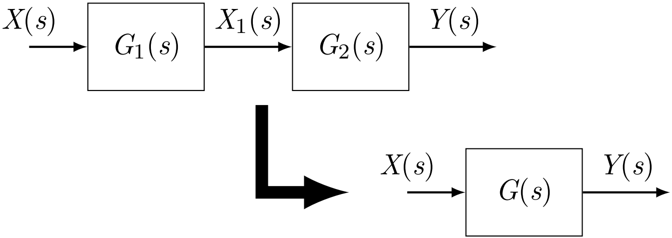
2）绘动态结构图。按照变量的传递顺序，依次将各元件的结构图连接起来



接下来...

典型连接方式及等效变换

1、串联及等效

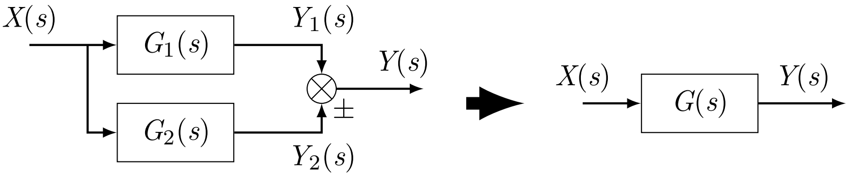


$$\frac{X_1(s)}{X(s)} = G_1(s), \qquad \frac{Y(s)}{X_1(s)} = G_2(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

典型连接方式及等效变换

2、并联及等效

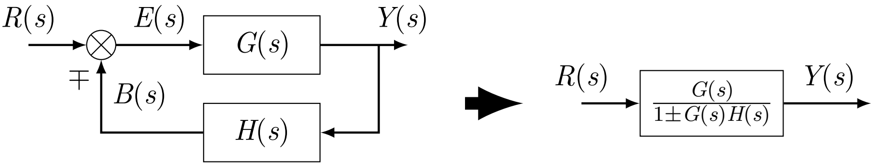


$$
\begin{aligned}
Y(s) &= Y_1(s) \pm Y_2(s) = X(s)G_1(s) \pm X(s)G_2(s) \\
&= X(s)[G_1(s) \pm G_2(s)] = X(s)G(s)
\end{aligned}
$$

$$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s)$$

典型连接方式及等效变换

3、反馈及等效



$$Y(s) = E(s)G(s), \quad E(s) = R(s) \mp B(s), \quad B(s) = Y(s)H(s)$$

$$Y(s) = [R(s) \mp B(s)]G(s) = R(s)G(s) \mp Y(s)H(s)G(s)$$

$$Y(s)[1 \pm H(s)G(s)] = R(s)G(s)$$

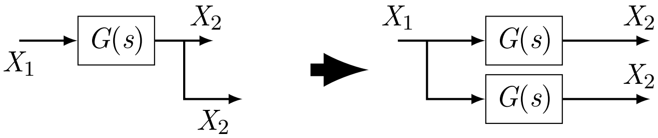
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm H(s)G(s)}$$

接下来...

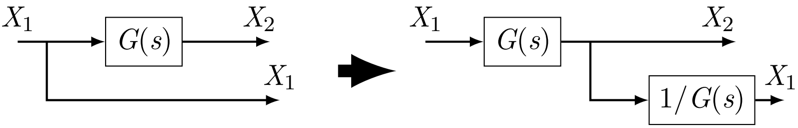
等效移动规则

1、引出点的移动

1）前移：在移动支路中串入所越过的传递函数方框



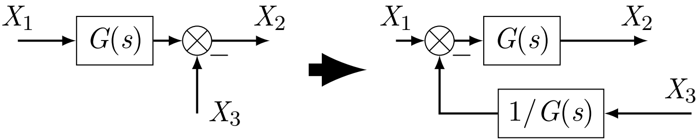
2）后移：在移动支路中串入所越过的传递函数的倒数方框



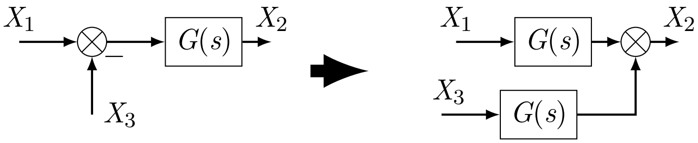
等效移动规则

2、综合点的移动

1）前移：在移动支路中串入所越过的传递函数的倒数方框

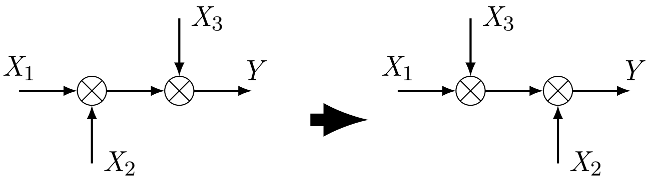


2）后移：在移动支路中串入所越过的传递函数方框



等效移动规则

3）相邻综合点移动



- 相邻综合点之间可以随意调换位置
- 相邻引出点之间可以随意调换位置

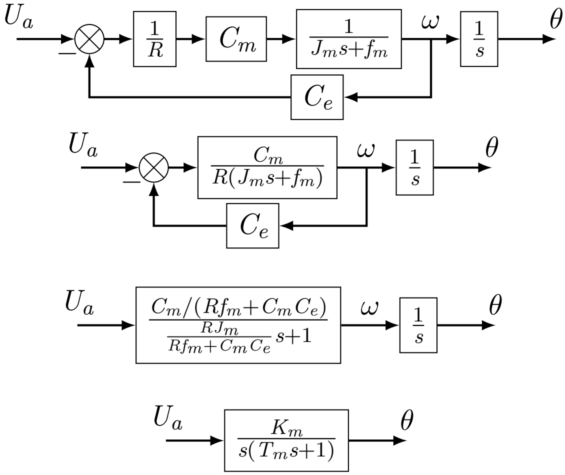
注意：相邻引出点和综合点之间不能互换!

接下来...

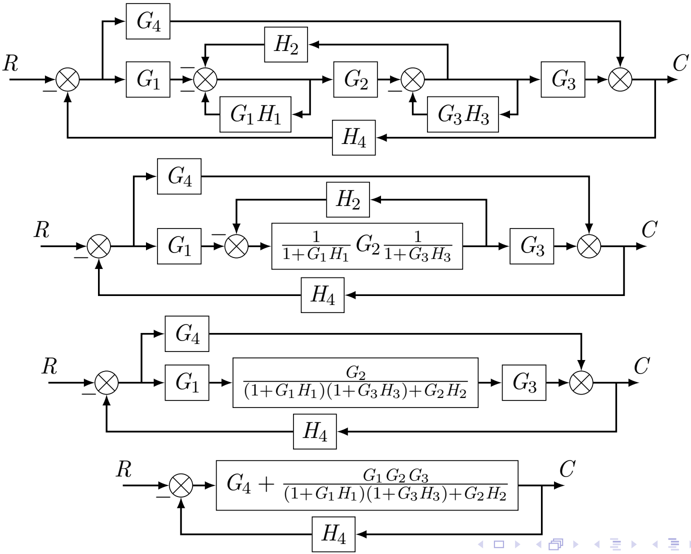
结构图等效变换方法

1. 若有三种典型结构，串联，并联或反馈，则直接用公式先化简;
2. 若没有三种典型结构，且回路之间有交叉，则必须移位。
3. 比较点只能向相邻比较点方向移位，引出点只能向相邻引出点方向移位。且移位后，常常伴随着与相邻综合点或相邻引出点交换位置或综合，以解交叉。
4. 由内回路向外回路一层层简化。
5. 注意：相邻引出点和综合点之间不能互换!

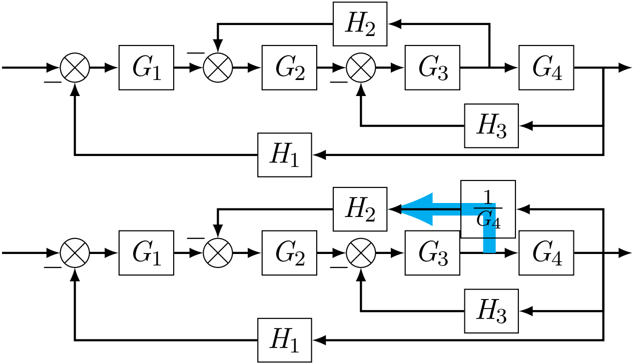
结构图简化例 1：电枢控制直流电动机



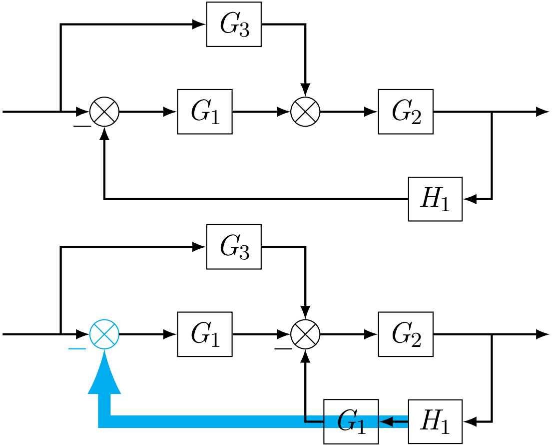
结构图简化例 2


R
C
G_4
H_2
G_1
G_2
G_3
G_1H_1
G_3H_3
H_4
$\frac{1}{1+G_1H_1}G_2\frac{1}{1+G_3H_3}$
$\frac{G_2}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_3)+G_2H_2}$
$G_4+\frac{G_1G_2G_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_3)+G_2H_2}$

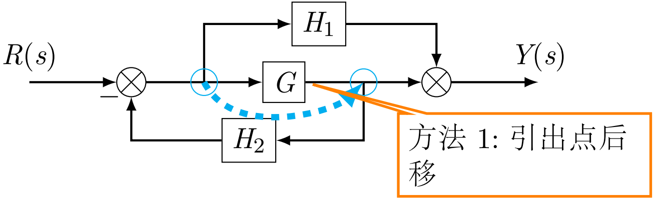
引出点移动

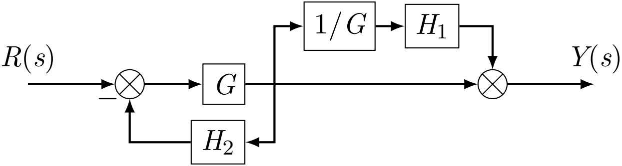


综合点移动



例 6 试简化系统结构图，并求系统传递函数

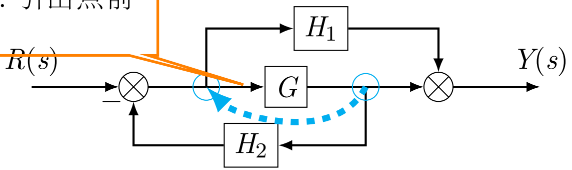


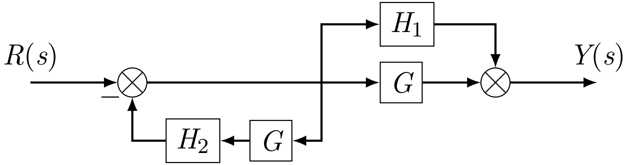


$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G + H_1}{1 + GH_2}$$

例 7 试简化系统结构图，并求系统传递函数

方法 2: 引出点前移





$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G + H_1}{1 + GH_2}$$

课程回顾：控制系统的结构图及其等效变换

一、动态结构图的组成

信号线、引出点、综合点、方框

二、典型连接方式及等效变换

1. 串联等效
2. 并联等效
3. 反馈等效

三、等效移动规则

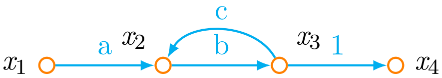
1. 引出点的移动
2. 综合点的移动

四、结构图等效变换方法

接下来...

信号流图的基本概念

信号流图是一种描述系统中各信号传递关系的数学图形。只适用于线性系统。其优点在于流图增益公式实用性。信号流图由节点和支路组成。



节点○： 表示系统中的变量。

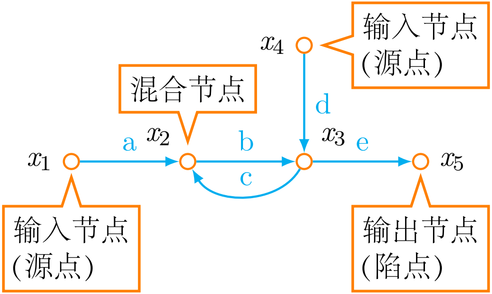
支路→： 表示变量之间的传输关系。

信流图的基本术语

源点： 只有流出支路的节点。对应于系统的输入信号，或称为输入节点。

陷点： 只有输入支路的节点。对应于系统的输出信号，或称为输出节点。

混合节点： 既有输入支点也有输出支点的节点



信流图的基本术语

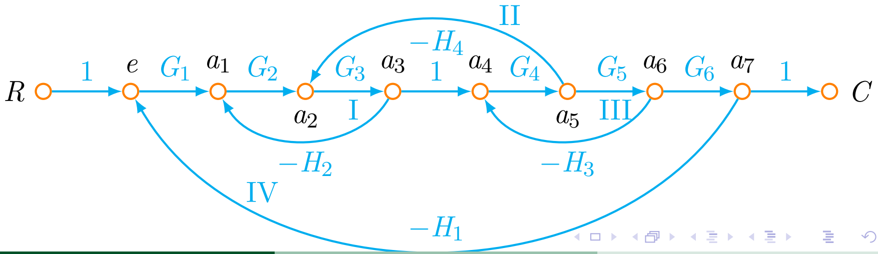
通路： 从某一节点开始沿支路箭头方向到另一节点（或同一节点）构成的路径。

回路： 如果通路的终点就是起点，并且与任何其他节点相交不多于一次。

回环增益： 回环中各支路增益的乘积。

前向通路： 从源点开始并终止于陷点，且与其他节点相交不多于一次的通道。该通路各支路增益乘积称为前向通路增益。

不接触回路： 各回路之间没有任何公共节点。反之称为接触回路。



接下来...

信号流图的绘制

由结构图绘制信流图

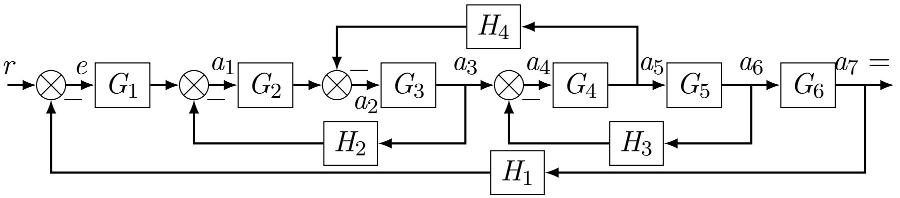
结构图		信号流图
输入信号	$\longrightarrow$	源节点
输出信号	$\longrightarrow$	陷节点
比较点，引出点	$\longrightarrow$	混合节点
环节	$\longrightarrow$	支路
环节传递函数	$\longrightarrow$	支路增益

信号流图的绘制

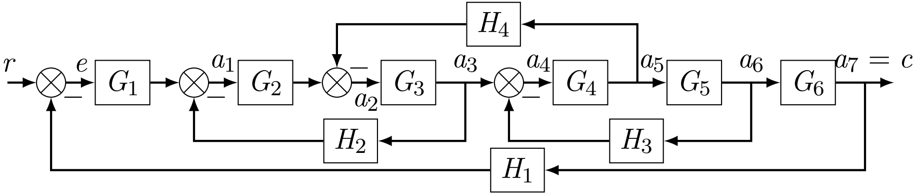
基本步骤：

1. 在结构图的信号线上，标出各变量对应节点名称。若比较点之后又有引出点，只需设一个节点。
2. 所有输入为源点，输出为陷点，可以通过引入单位增益支路实现。
3. 将各节点按原来顺序排列；
4. 连接各支路，注意支路增益符号。

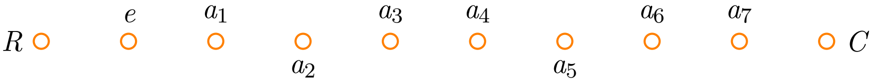
由结构图绘制信号流图



由结构图绘制信号流图

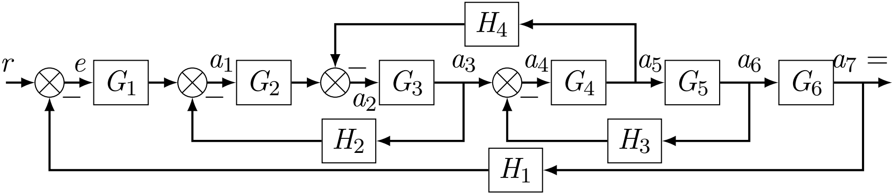


r
e
G_1
a_1
G_2
a_2
G_3
a_3
a_4
G_4
a_5
G_5
a_6
G_6
$a_7 = c$
H_4
H_2
H_3
H_1
$-$

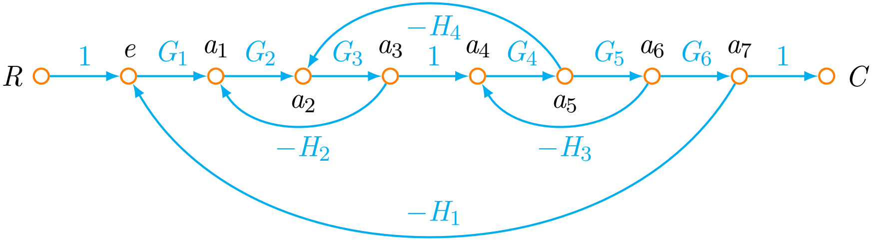


R
e
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_6
a_7
C

由结构图绘制信号流图

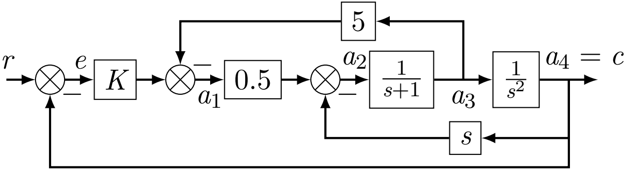


r
e
G_1
a_1
G_2
a_2
G_3
a_3
a_4
G_4
a_5
G_5
a_6
G_6
$a_7 = c$
H_4
H_2
H_3
H_1

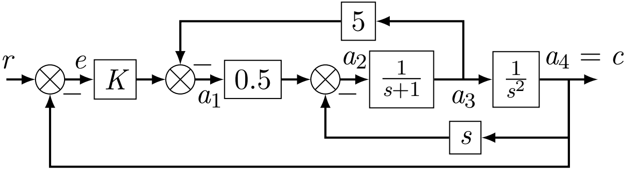


R
1
e
G_1
a_1
G_2
a_2
G_3
a_3
1
a_4
G_4
a_5
G_5
a_6
G_6
a_7
1
C
$-H_4$
$-H_2$
$-H_3$
$-H_1$

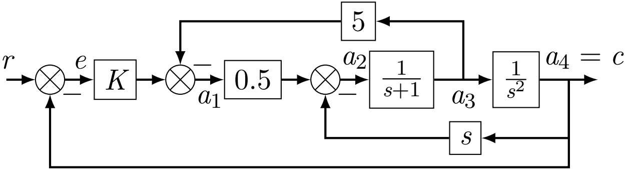
由结构图绘制信号流图

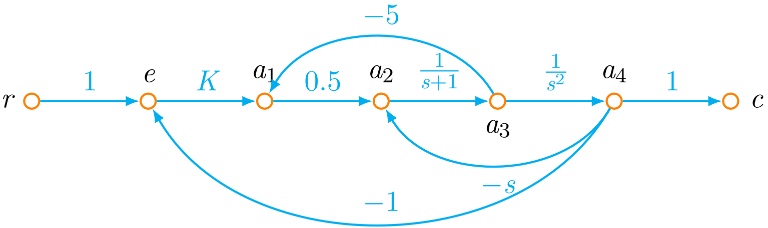


由结构图绘制信号流图



由结构图绘制信号流图





由方程组绘制信号流图

首先按照节点的次序绘出各节点，然后根据各方程式绘制各支路。当所有方程式的信号流图绘制完毕后，即得系统的信号流图。

$$x_1 = x_r - gx_c \quad x_2 = ax_1 - fx_4 \quad x_3 = bx_2 - ex_c$$
$$x_4 = cx_3 \quad x_c = dx_4$$

由方程组绘制信号流图

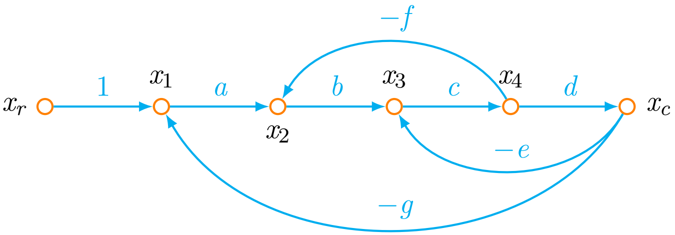
首先按照节点的次序绘出各节点，然后根据各方程式绘制各支路。当所有方程式的信号流图绘制完毕后，即得系统的信号流图。

$$x_1 = x_r - gx_c \quad x_2 = ax_1 - fx_4 \quad x_3 = bx_2 - ex_c$$
$$x_4 = cx_3 \quad x_c = dx_4$$

由方程组绘制信号流图

首先按照节点的次序绘出各节点，然后根据各方程式绘制各支路。当所有方程式的信号流图绘制完毕后，即得系统的信号流图。

$$x_1 = x_r - gx_c \quad x_2 = ax_1 - fx_4 \quad x_3 = bx_2 - ex_c$$
$$x_4 = cx_3 \quad x_c = dx_4$$



接下来...

梅逊（Mason）增益公式

$$p = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta_k$$

p 总增益

p_k 第 k 条前向通路的通路增益

Δ 信号流图的特征式，即

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{bc} L_b L_c - \sum_{def} L_d L_e L_f + \cdots$$

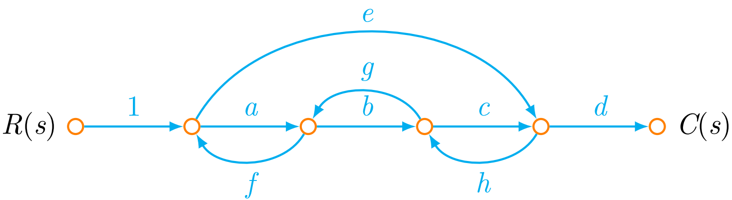
$\sum_a L_a$ 所有回路增益之和

$\sum_{bc} L_b L_c$ 每两互不接触回路增益乘积之和

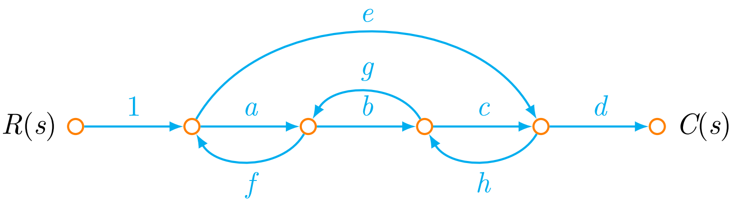
$\sum_{def} L_d L_e L_f$ 每三个互不接触回路增益乘积之和

Δ_k 在 Δ 中除去与第 k 条前向通道相接触的回路后的特征式，称为前向通道特征式的余子式。

由信号流图计算传递函数

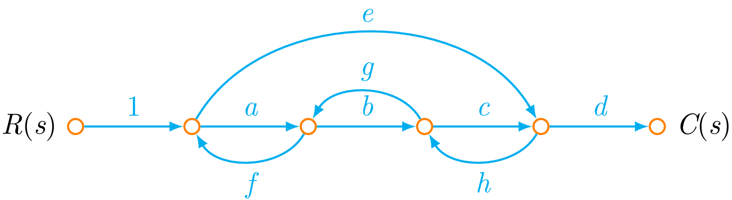


由信号流图计算传递函数



四个单独回路，两个回路互不接触
前向通路两条

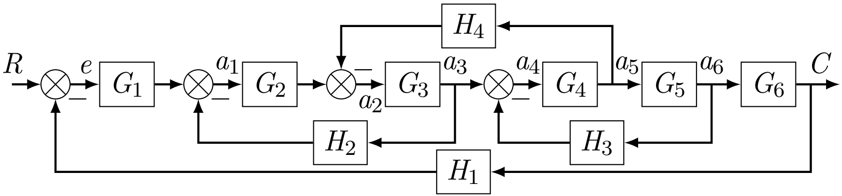
由信号流图计算传递函数



四个单独回路，两个回路互不接触
前向通路两条

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{abcd + ed(1-bg)}{1 - af - bg - ch - ehgf + afch}$$

例 8 求 $C(s)/R(s)$

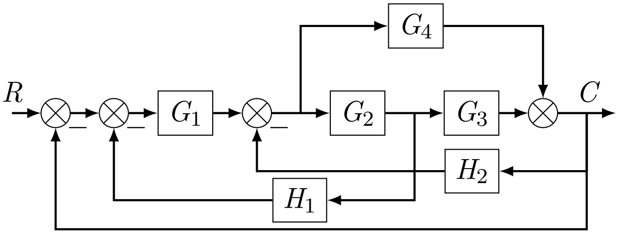


$$
\begin{aligned}
\Delta &= 1 - [-G_2G_3H_2 - G_4G_5H_3 - G_3G_4H_4 - G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1] \\
&\quad + (-G_2G_3H_2)(-G_4G_5H_3) \\
&= 1 + G_2G_3H_2 + G_4G_5H_3 + G_3G_4H_4 \\
&\quad + G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 + G_2G_3G_4G_5H_2H_3
\end{aligned}
$$

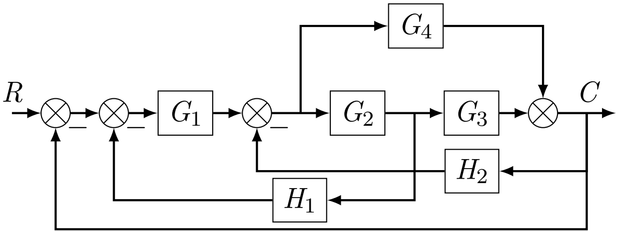
$$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6 \qquad \Delta_1 = 1$$

$$\Phi = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5G_6}{1 + G_2G_3H_2 + G_4G_5H_3 + G_3G_4H_4 + G_{1-6}H_1 + G_{2-5}H_2H_3}$$

例 9 求 $C(s)/R(s)$

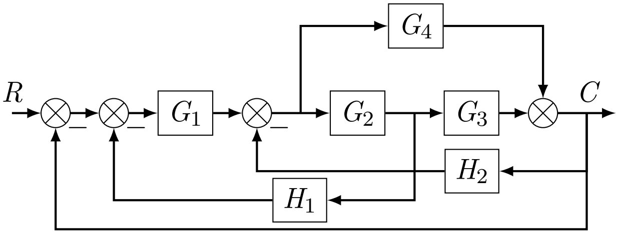


例 9 求 $C(s)/R(s)$



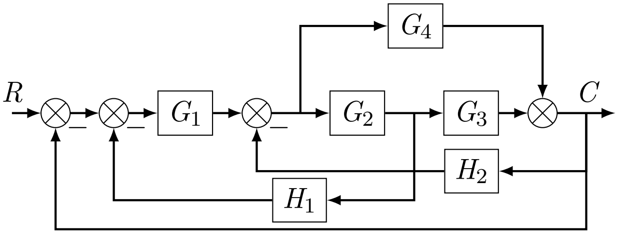
$$\Delta = 1 - [-G_1 G_2 H_1 - G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 G_3 - G_4 H_2 - G_1 G_4]$$

例 9 求 $C(s)/R(s)$



$$\begin{aligned}\Delta &= 1-[-G_1G_2H_1-G_2G_3H_2-G_1G_2G_3-G_4H_2-G_1G_4]\\ &= 1+G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3+G_4H_2+G_1G_4\end{aligned}$$

例 9 求 $C(s)/R(s)$

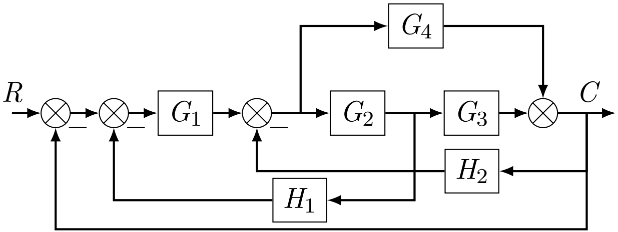


$$\Delta = 1 - [-G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3 - G_4H_2 - G_1G_4]$$
$$= 1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_4H_2 + G_1G_4$$

$$P_1 = G_1G_2G_3 \qquad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_1G_4 \qquad \Delta_2 = 1$$

例 9 求 $C(s)/R(s)$



$$\Delta = 1 - [-G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3 - G_4H_2 - G_1G_4]$$

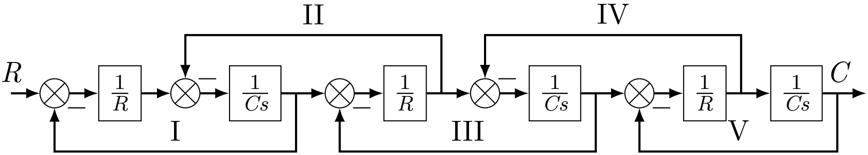
$$= 1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_4H_2 + G_1G_4$$

$$P_1 = G_1G_2G_3 \qquad \Delta_1 = 1$$

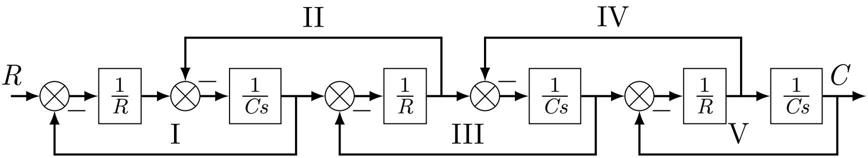
$$P_2 = G_1G_4 \qquad \Delta_2 = 1$$

$$\Phi = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3 + G_4H_2 + G_1G_4}$$

例 10 求 $C(s)/R(s)$

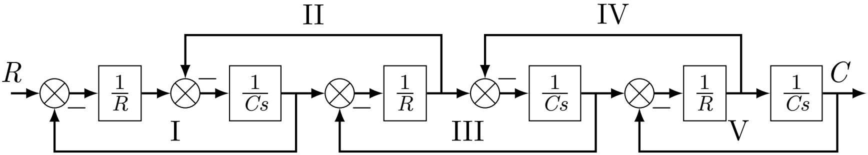

R
II
IV
C
$\frac{1}{R}$
$\frac{1}{Cs}$
$\frac{1}{R}$
$\frac{1}{Cs}$
$\frac{1}{R}$
$\frac{1}{Cs}$
I
III
V

例 10 求 $C(s)/R(s)$



互不接触回路：I-III，I-V，III-V，I-IV，II-V，II-IV

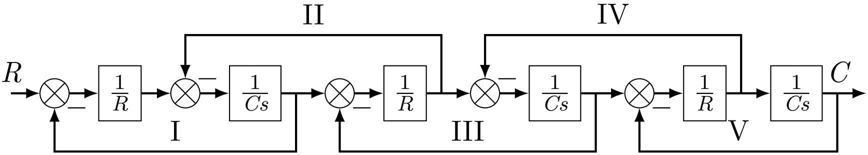
例 10 求 $C(s)/R(s)$



互不接触回路：I-III，I-V，III-V，I-IV，II-V，II-IV

$$\Delta = 1 - 5 \cdot \frac{-1}{RCs} + 6 \cdot \frac{1}{(RCs)^2} - \frac{-1}{(RCs)^3}$$

例 10 求 $C(s)/R(s)$

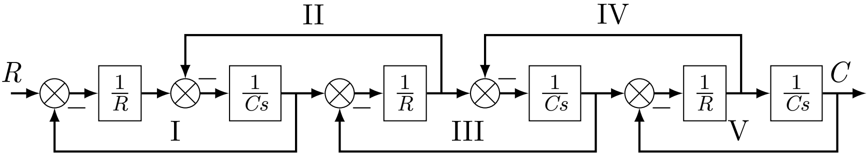


互不接触回路：I-III，I-V，III-V，I-IV，II-V，II-IV

$$\Delta = 1 - 5 \cdot \frac{-1}{RCs} + 6 \cdot \frac{1}{(RCs)^2} - \frac{-1}{(RCs)^3}$$

$$P_1 = \frac{1}{(RCs)^3} \qquad \Delta_1 = 1$$

例 10 求 $C(s)/R(s)$



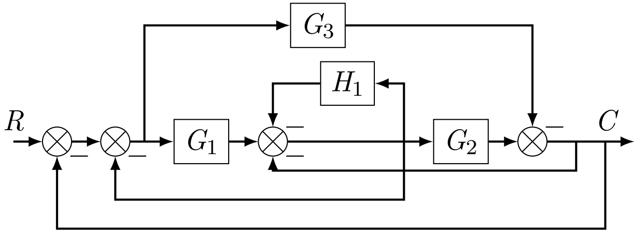
互不接触回路：I-III，I-V，III-V，I-IV，II-V，II-IV

$$\Delta = 1 - 5 \cdot \frac{-1}{RCs} + 6 \cdot \frac{1}{(RCs)^2} - \frac{-1}{(RCs)^3}$$

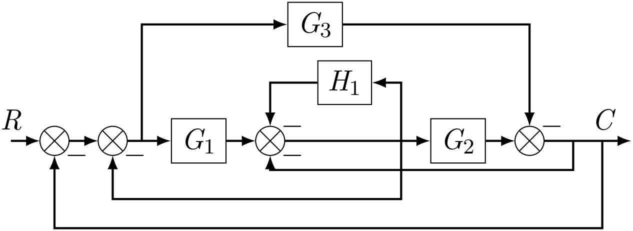
$$P_1 = \frac{1}{(RCs)^3} \qquad \Delta_1 = 1$$

$$\Phi = \frac{1}{1 + (RCs)^3 + 5(RCs)^2 + 6(RCs)}$$

例 11 求 $C(s)/R(s)$

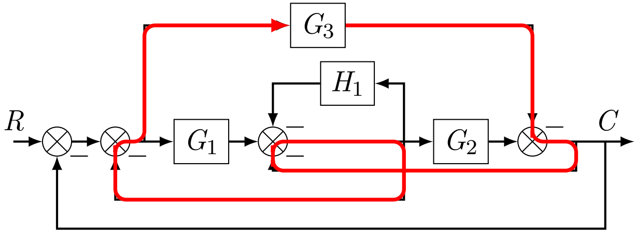


例 11 求 $C(s)/R(s)$



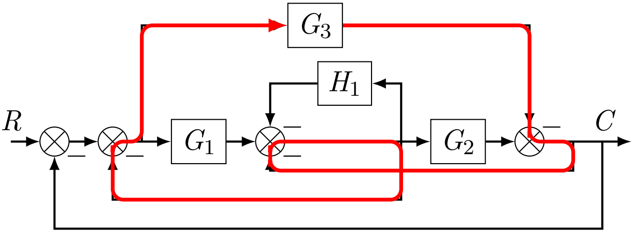
$$\Delta = 1 - [-H_1 - G_1 - G_2 - G_1G_2 + G_3 - G_3] - G_3H_1$$
$$= 1 + H_1 + G_1 + G_2 + G_1G_2 - G_3H_1$$

例 11 求 $C(s)/R(s)$



$$\Delta = 1 - [-H_1 - G_1 - G_2 - G_1G_2 + G_3 - G_3] - G_3H_1$$
$$= 1 + H_1 + G_1 + G_2 + G_1G_2 - G_3H_1$$

例 11 求 $C(s)/R(s)$

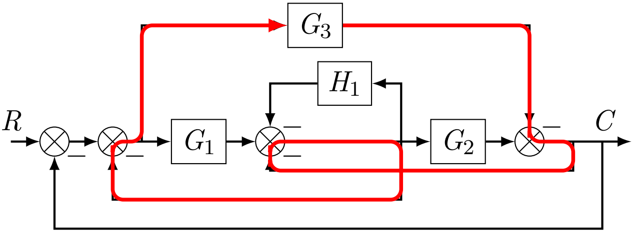


$$\Delta = 1 - [-H_1 - G_1 - G_2 - G_1G_2 + G_3 - G_3] - G_3H_1$$
$$= 1 + H_1 + G_1 + G_2 + G_1G_2 - G_3H_1$$

$P_1 = G_1G_2 \qquad \Delta_1 = 1$

$P_2 = -G_3 \qquad \Delta_2 = 1 + H_1$

例 11 求 $C(s)/R(s)$



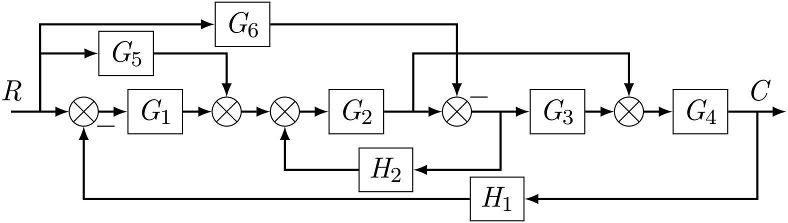
$$\Delta = 1 - [-H_1 - G_1 - G_2 - G_1G_2 + G_3 - G_3] - G_3H_1$$
$$= 1 + H_1 + G_1 + G_2 + G_1G_2 - G_3H_1$$

$P_1 = G_1G_2 \qquad \Delta_1 = 1$

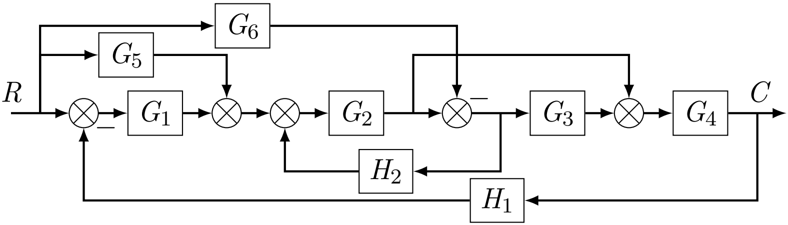
$P_2 = -G_3 \qquad \Delta_2 = 1 + H_1$

$$\Phi = \frac{G_1G_2 - G_3(1 + H_1)}{1 + H_1 + G_1 + G_2 + G_1G_2 - G_3H_1}$$

例 12 求 $C(s)/R(s)$

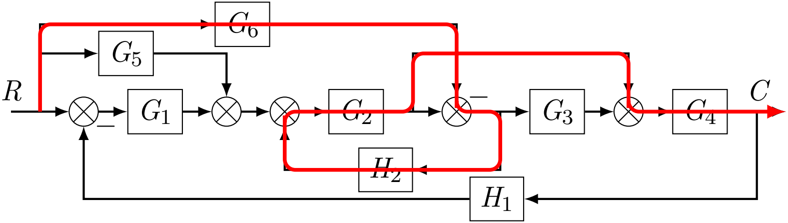


例 12 求 $C(s)/R(s)$



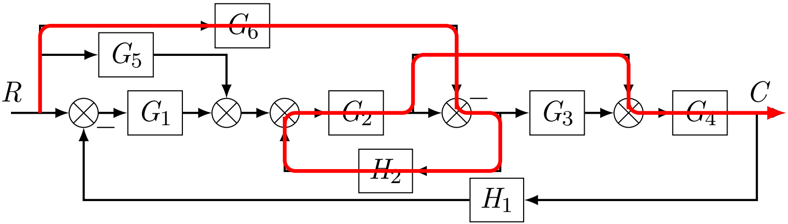
$$\Delta = 1 - [G_2 H_2 - G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 - G_1 G_2 G_4 H_1]$$
$$= 1 - G_2 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 + G_1 G_2 G_4 H_1$$

例 12 求 $C(s)/R(s)$



$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - [G_2H_2 - G_1G_2G_3G_4H_1 - G_1G_2G_4H_1] \\ &= 1 - G_2H_2 + G_1G_2G_3G_4H_1 + G_1G_2G_4H_1\end{aligned}$$

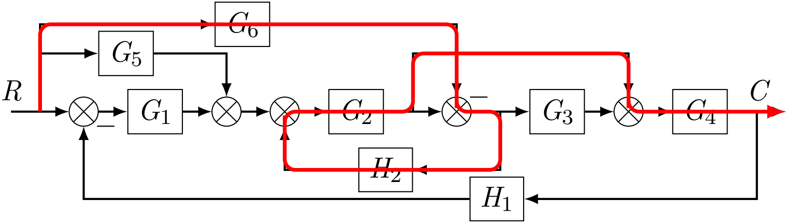
例 12 求 $C(s)/R(s)$



$$\begin{aligned}\Delta &= 1-[G_2H_2-G_1G_2G_3G_4H_1-G_1G_2G_4H_1]\\ &=1-G_2H_2+G_1G_2G_3G_4H_1+G_1G_2G_4H_1\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} P_1=G_1G_2G_3G_4 & \Delta_1=1 & P_2=G_1G_2G_4 & \Delta_2=1\\ P_3=G_2G_3G_4G_5 & \Delta_3=1 & P_4=G_2G_4G_5 & \Delta_4=1\\ P_5=-G_3G_4G_6 & \Delta_5=1 & P_6=-G_6H_2G_2G_4 & \Delta_6=1\end{array}$$

例 12 求 $C(s)/R(s)$



$$\Delta = 1 - [G_2H_2 - G_1G_2G_3G_4H_1 - G_1G_2G_4H_1]$$
$$= 1 - G_2H_2 + G_1G_2G_3G_4H_1 + G_1G_2G_4H_1$$

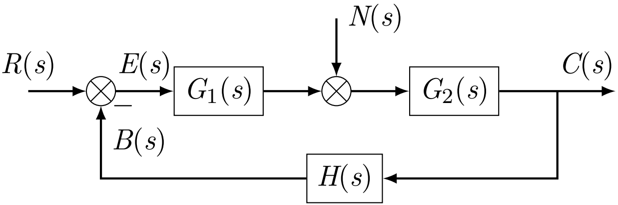
$$\begin{array}{llll} P_1 = G_1G_2G_3G_4 & \Delta_1 = 1 & P_2 = G_1G_2G_4 & \Delta_2 = 1 \\ P_3 = G_2G_3G_4G_5 & \Delta_3 = 1 & P_4 = G_2G_4G_5 & \Delta_4 = 1 \\ P_5 = -G_3G_4G_6 & \Delta_5 = 1 & P_6 = -G_6H_2G_2G_4 & \Delta_6 = 1 \end{array}$$

$$\Phi = \frac{G_{1-4} + G_{1,2,4} + G_{2-5} + G_{2,4,5} - G_{3,4,6} - G_6H_2G_2G_4}{1 - G_2H_2 + G_1G_2G_3G_4H_1 + G_1G_2G_4H_1}$$

小结

1. 信号流图的组成
2. 信号流图与结构图的关系
3. 结构图 $\Rightarrow$ 信号流图

控制系统的传递函数



一、系统的开环传递函数

定义为把主反馈通道断开，得到的传递函数

$$G_k(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s)$$

控制系统的传递函数

二、输入作用下系统的闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

三、扰动作用下系统的闭环传递函数

$$\Phi_N(s)=\frac{Y_N(s)}{N(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

四、系统的总输出

$$Y(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\cdot R(s)+\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\cdot N(s)$$

控制系统的传递函数

五、误差传递函数

误差信号 $E(s)=R(s)-B(s)$

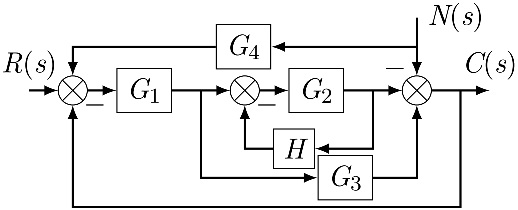
输入作用下的误差传递函数 $\Phi_e(s)=\dfrac{E(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$

扰动作用下的误差传递函数 $\Phi_{eN}(s)=\dfrac{E(s)}{N(s)}=\dfrac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$

六、系统的总误差

$$E(s)=\frac{R(s)-G_2(s)H(s)N(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

例 13 求 $C(s)/R(s)$ ，$C(s)/N(s)$

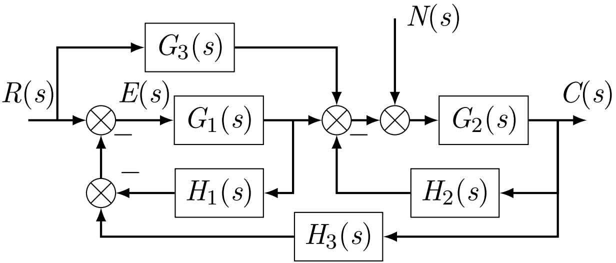


$$\begin{aligned}\Delta &= 1-[-G_2H-G_1G_2-G_1G_3]+G_1G_2G_3H\\ &= 1+G_2H+G_1G_2+G_1G_3+G_1G_2G_3H\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{ll} P_1=G_1G_2 & \Delta_1=1\\ P_2=G_1G_3 & \Delta_2=1+G_2H\end{array}\right\}\Phi=\frac{G_1G_2+G_1G_3(1+G_2H)}{1+G_2H+G_1G_2+G_1G_3+G_{1-3}H}$$

$$\left.\begin{array}{ll} P_{N1}=-1 & \Delta_{N1}=1+G_2H\\ P_{N2}=G_{4,1,2} & \Delta_{N2}=1\\ P_{N3}=G_{4,1,3} & \Delta_{N3}=1+G_2H\end{array}\right\}\Phi_N=\frac{(-1+G_{1,3,4})(1+G_2H)+G_{1,2,4}}{1+G_2H+G_{1,2}+G_{1,3}+G_{1-3}H}$$

例 14 梅逊公式求 $C(s)$

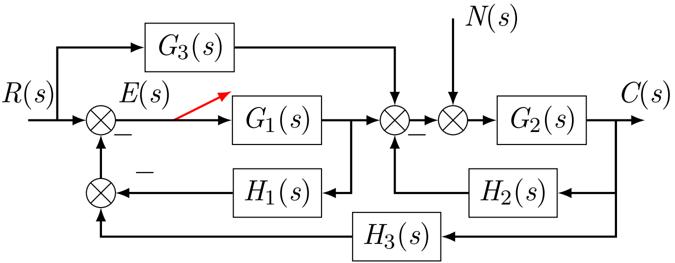


$$L_1 = G_1H_1 \qquad L_2 = -G_2H_2$$

$$L_3 = -G_1G_2H_3 \qquad L_1L_2 = (G_1H_1)(-G_2H_2)$$

$$C(s) = \frac{R(s)[G_3G_2(1-G_1H_1)+G_1G_2]+G_2(1-G_1H_1)N(s)}{1-G_1H_1+G_2H_2+G_1G_2H_3-G_1H_1G_2H_2}$$

例 15 梅逊公式求 $E(s)$



$$P_1 = 1 \qquad \Delta_1 = 1 + G_2 H_2$$
$$P_2 = -G_3 G_2 H_3 \qquad \Delta_2 = 1$$
$$P_1 = -G_2 H_3 \qquad \Delta_1 = 1$$

$$E(s) = \frac{R(s)[(1 + G_2 H_2) + (-G_3 G_2 H_3)] + (-G_2 H_3) N(s)}{1 - G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_3 - G_1 H_1 G_2 H_2}$$

本章小结

- 掌握建立微分方程的方法
- 掌握拉氏变换求解微分方程的方法
- 牢固掌握系统传递函数的定义
- 能熟练地进行动态结构图等效变换
- 能熟练运用梅逊公式求取系统传递函数
- 了解控制系统中各种传递函数的定义