自动控制原理

第五章 线性系统的频域分析

电子信息学院

主讲：张永韡 博士 讲师

email: ywzhang@just.edu.cn

主要内容

1. 频率特性的基本概念
   - 频率特性 $G(j\omega)$ 的定义
   - 频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的图解表示
2. 对数频率特性（Bode 图）
   - 典型环节的 Bode 图
   - 开环系统对数频率特性（Bode)
3. 幅相频率特性（Nyquist 图）
   - 典型环节的幅相频率特性
   - 系统开环幅相曲线
4. 频域稳定判据
   - 幅角原理
   - 奈奎斯特稳定判据
   - 对数稳定判据
5. 稳定裕度
   - 稳定裕度的定义
   - 稳定裕度的计算

频域分析法特点

(A) 研究稳态正弦响应的幅值和相角随频率的变化规律
(B) 由开环频率特性研究闭环稳定性及性能
(C) 图解分析法，简单形象，有一定的近似性
(D) 物理意义明确，许多元部件都可用实验法确定
(E) 在校正方法中，频率法校正最为方便

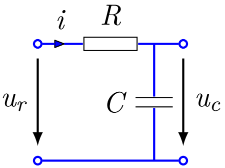
主要内容

1. 频率特性的基本概念
2. 对数频率特性（Bode 图）
3. 幅相频率特性（Nyquist 图）
4. Nyquist 稳定性判据
5. 稳定裕度
6. 利用频率特性分析系统的性能

频率特性的基本概念

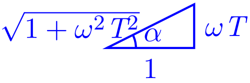
例 1 RC 电路如图所示，$u_r(t) = A\sin\omega t$, 求 $u_c(t) = ?$

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{CRs+1} \xlongequal{T=CR} \frac{1}{Ts+1} = \frac{1/T}{s+1/T}$$



$$U_c(s) = \frac{1/T}{s+1/T}\cdot\frac{A\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{C_0}{s+1/T} + \frac{C_1 s + C_2}{s^2+\omega^2}$$

$$C_0 = \lim_{s\to -1/T}\frac{A\omega/T}{s^2+\omega^2} = \frac{A\omega T}{1+\omega^2T^2}$$



$$C_1 = \frac{-A\omega T}{1+\omega^2T^2} \qquad C_2 = \frac{A\omega}{1+\omega^2T^2}$$

$$U_c(s) = \frac{A\omega T}{1+\omega^2T^2}\cdot\frac{1}{s+1/T} + \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \frac{T\omega}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]$$

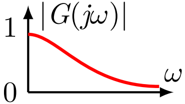
$$\begin{aligned} u_c(t) &= \frac{A\omega T}{1+\omega^2T^2}e^{\frac{-t}{T}} + \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}[\sin\omega t\cdot\cos a - \cos\omega t\sin a] \\ &= \frac{A\omega T}{1+\omega^2T^2}e^{\frac{-t}{T}} + \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\sin(\omega t - \arctan\omega T) \end{aligned}$$

接下来...

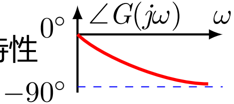
频率特性 $G(j\omega)$ 的定义

$$c_s(t) = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$$

幅频特性



相频特性



$G(j\omega)$ 定义一：$G(\mathrm{j}\omega) = |G(\mathrm{j}\omega)| \angle G(\mathrm{j}\omega)$

$$\begin{cases} |G(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|c_s(t)|}{|r(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \\ \angle G(\mathrm{j}\omega) = \angle c_s(t) - \angle r(t) = \arctan \omega T \end{cases}$$

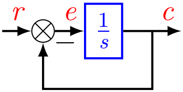
$G(j\omega)$ 定义二：$G(\mathrm{j}\omega) = G(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \angle -\arctan \omega T = \left|\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T}\right| \angle \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T} = \frac{1}{Ts+1}\Big|_{s=\mathrm{j}\omega}$$

$G(j\omega)$ 定义三：$G(j\omega) = \frac{C(\mathrm{j}\omega)}{R(\mathrm{j}\omega)}$

频率特性 $G(j\omega)$ 的定义

例 2 系统结构图如图所示，
$r(t)=3\sin(2t+30^\circ)$，求 $c_s(t)$。
解：



$$\Phi(s)=\frac{1}{s+1}\Rightarrow\Phi(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$$

$$\begin{cases}|\Phi(j\omega)|=\left|\frac{1}{1+j\omega}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\overset{\omega=2}{=}\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{|c_s(t)|}{|r(t)|}=\frac{|c_s(t)|}{3}\\ \angle\Phi(j\omega)=-\arctan\omega\overset{\omega=2}{=}-63.4^\circ=\angle c_s(t)-\angle r(t)=\angle c_s(t)-30^\circ\end{cases}$$

$$\begin{cases}|c_s(t)|=\frac{3}{\sqrt{5}}\\ \angle c_s(t)=-63.4^\circ+30^\circ=-33.4^\circ\end{cases}$$

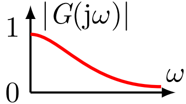
$$c_s(t)=\frac{3}{\sqrt{5}}\sin(2t-33.4^\circ)$$

接下来...

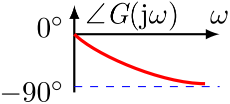
频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的图解表示

I. 频率特性

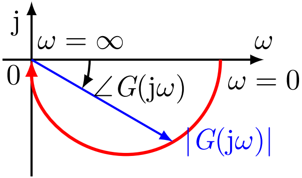
幅频 $|G(\mathrm{j}\omega)|$



相频 $\angle G(\mathrm{j}\omega)$



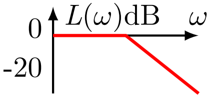
II. 幅相特性 (Nyquist、极坐标)



III. 对数频率特性 (Bode)

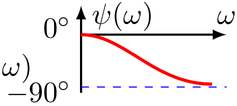
对数幅频

$L(\omega) = 20\lg|G(\mathrm{j}\omega)|$

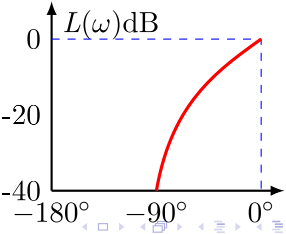


对数相频

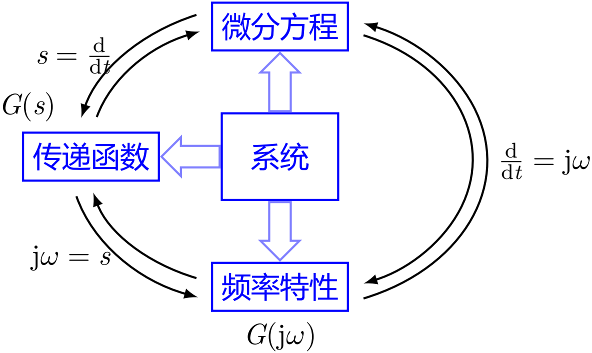
$\psi(\omega) = \angle G(\mathrm{j}\omega)$



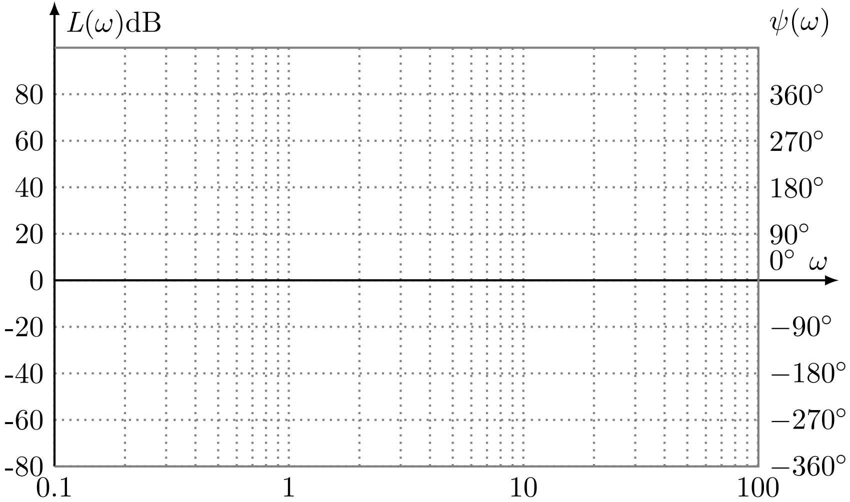
IV. 对数幅相特性 (Nichols)



系统模型间的关系


微分方程
$s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$
$G(s)$
传递函数
系统
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega$
$\mathrm{j}\omega = s$
频率特性
$G(\mathrm{j}\omega)$

对数频率特性（Bode 图）



对数频率特性（Bode 图）

坐标特点

横轴 (1) 按 $\lg\omega$ 刻度，dec “十倍频程”

(2) 按 ω 标定，等距等比

纵轴 $L(\omega) = 20\lg|G(j\omega)|\mathrm{dB}$ “分贝”

特点 (1) 幅值相乘 = 对数相加，便于叠加作图；

(2) 可在大范围内表示频率特性；

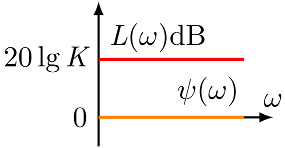
(3) 使各个频段（分别关系到系统各种性能）都可以得到同等重视。

(4) (非直线）特性曲线可以绘制渐近对数幅频特性，进一步简化绘制过程；

接下来...

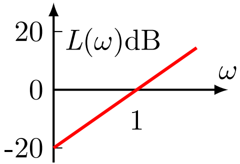
典型环节的 Bode 图

(1) 比例环节 $G(\mathrm{j}\omega) = K \begin{cases} L(\omega) = 20\lg K \\ \psi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$

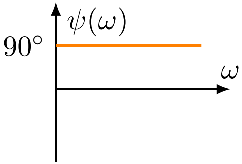


(2) 微分环节 $G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega \begin{cases} L(\omega) = 20\lg\omega \\ \psi(\omega) = 90^\circ \end{cases}$

$L(\omega)$ 是一条斜率为$+$ 20db/dec，
过（1,0）点的直线，记作 [+ 20]。



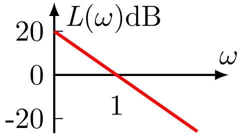
注：当 $G(\mathrm{j}\omega) = (\mathrm{j}\omega)^\alpha$ $\begin{cases} L(\omega) = 20\alpha\lg\omega \\ \psi(\omega) = \alpha * 90^\circ \end{cases}$

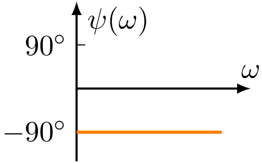


典型环节的 Bode 图

(3) 积分环节 $G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$ $\begin{cases} L(\omega)=-20\lg\omega \\ \psi(\omega)=-90^\circ \end{cases}$

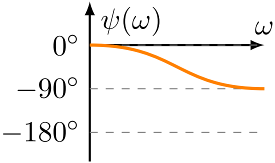
当 $G(\mathrm{j}\omega)=\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right)^\alpha$ $\begin{cases} L(\omega)=-20\alpha\lg\omega \\ \psi(\omega)=-\alpha*90^\circ \end{cases}$

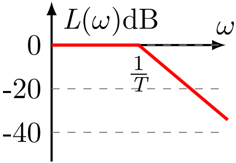




(4) 惯性环节 $G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T}$

$$\begin{cases} L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2} \\ \psi(\omega)=-\arctan\omega T \end{cases}$$





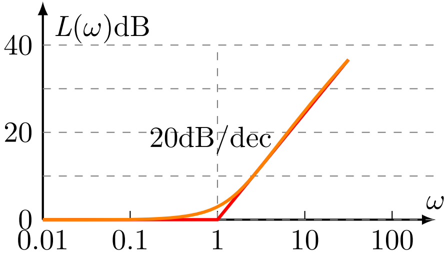
典型环节的 Bode 图

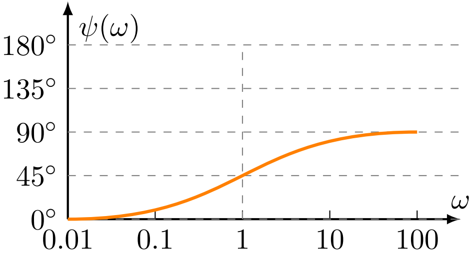
(5) 一阶微分

$G(s) = Ts + 1$

$G(j\omega) = 1 + j\omega T$

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg\sqrt{1+\omega^2 T^2} \\ \psi(\omega) = \arctan \omega T \end{cases}$$





典型环节的 Bode 图

(6) 震荡环节

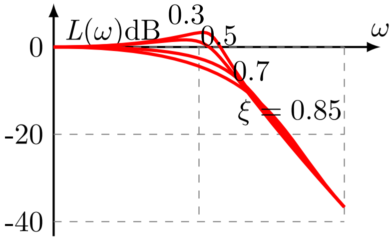
$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi s}{\omega_n}+1}$$

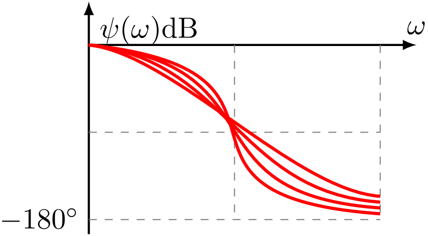
$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+\mathrm{j}2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\begin{cases} L(\omega)=-20\lg\sqrt{[1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}]^2+[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}]^2} \\ \psi(\omega)=\arctan\left[\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)/\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\right] \end{cases}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n}<<1\ \begin{cases} L(\omega)\approx 0 \\ \psi(\omega)\approx 0 \end{cases}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n}>>1\ \begin{cases} L(\omega)\approx -40\lg(\omega/\omega_n) \\ \psi(\omega)\approx -180^\circ \end{cases}$$





典型环节的 Bode 图

谐振频率 ω_r 和谐振峰值 M_r

$$L(\omega) = 20\lg|G| = 20\lg 1/\sqrt{[1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}]^2 + [2\xi\frac{\omega}{\omega_n}]^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}|G| = 0 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left\{[1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}]^2 + [2\xi\frac{\omega}{\omega_n}]^2\right\} = 0$$

$$2[1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}][-2(\frac{\omega}{\omega_n})] + 2[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}](\frac{2\xi}{\omega_n}) = 0$$

$$\frac{4\omega}{\omega_n^2}[-1+\frac{\omega_2}{\omega_n^2}+2\xi^2] = 0$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1-2\xi^2$$

$$\begin{cases} \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ M_r = 20\lg|G(\mathrm{j}\omega_r)| = 20\lg\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases}$$

接下来...

开环系统的 Bode 图

$$G(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^v(T_1 s+1)\cdots(T_{n-v}s+1)}$$

$$\begin{aligned}
L(\omega)=&20\lg|G|\\
=&20\lg K+20\lg|1+\mathrm{j}\tau_1\omega|+\cdots+20\lg|1+\mathrm{j}\tau_m\omega|\\
&-20v\lg|\omega|-20\lg|1+\mathrm{j}T_1\omega|-\cdots-20\lg|1+\mathrm{j}T_{n-v}\omega|\\
\psi(\omega)=&\angle G\\
=&\arctan\tau_1\omega+\cdots+\arctan\tau_m\omega\\
&-90^\circ v-\arctan T_1\omega-\cdots-\arctan T_{n-v}\omega
\end{aligned}$$

绘制开环系统 Bode 图的步骤

例 3 $G(s)=\dfrac{40(s+0.5)}{s(s+0.2)(s^2+s+1)}$

(1) 化 $G(s)$ 为尾 1 标准型

$$G(s)=\frac{100(\frac{s}{0.5}+1)}{s(\frac{s}{0.2}+1)(s^2+s+1)}$$

(2) 顺序列出转折频率

$$\begin{cases} 0.2 & \text{惯性环节} \\ 0.5 & \text{一阶复合微分} \\ 1 & \text{振荡环节} \end{cases}$$

(3) 确定低频特性

$\left(\begin{array}{l}\text{最小转折频率之左}\\ \text{的特性或其延长线}\end{array}\right)$

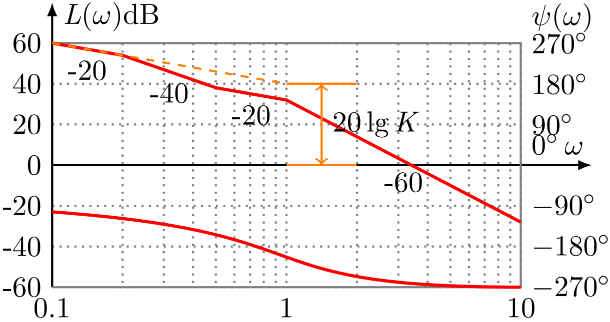
$$\begin{cases} \text{基准点 } (\omega=1,\ L(1)=20\lg K) \\ \text{斜率 } -20v \text{ dB/dec} \end{cases}$$

(4) 叠加作图

$$\begin{cases} \text{一阶} \begin{cases} \text{惯性环节} & \text{-20dB/dec} \\ \text{复合环节} & \text{+20dB/dec} \end{cases} \\ \text{二阶} \quad \text{震荡环节} \quad \text{-40dB/dec} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega=0.2 & \text{惯性环节} & -20 \\ \omega=0.5 & \text{一阶复合微分} & +20 \\ \omega=1 & \text{振荡环节} & -40 \end{cases}$$

绘制开环系统 Bode 图的步骤



$$\begin{cases} \text{基准点 } \omega = 1,\ L(1) = 20\lg K = 40\text{dB} \\ \text{斜率 } \ -20v\ \text{dB/dec} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega = 0.2 & \text{惯性环节} & -20 \\ \omega = 0.5 & \text{一阶复合微分} & +20 \\ \omega = 1 & \text{振荡环节} & -40 \end{cases}$$

(5) 修正，如振荡环节 $\xi \notin (0.38, 0.8)$ 时

开环系统对数频率特性 (Bode)

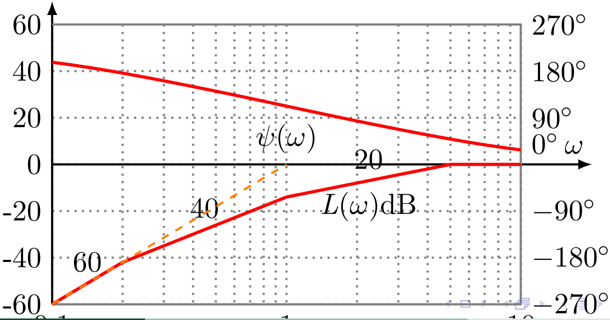
例 4 $G(s)=\dfrac{s^3}{(s+0.2)(s+1)(s+5)}$

解：(1) 标准型 $G(s)=\dfrac{s^3}{(\frac{s}{0.2}+1)(s+1)(\frac{s}{5}+1)}$

(2) 转折频率：$\omega_1=0.2\rightarrow-20$，$\omega_2=1\rightarrow-20$，$\omega_3=5\rightarrow-20$

(3) 基准线：基点（$\omega=1$，$20\lg 1=0\text{dB}$），斜率：$-20\times(-3)=60\text{dB/dec}$

(4) 作图



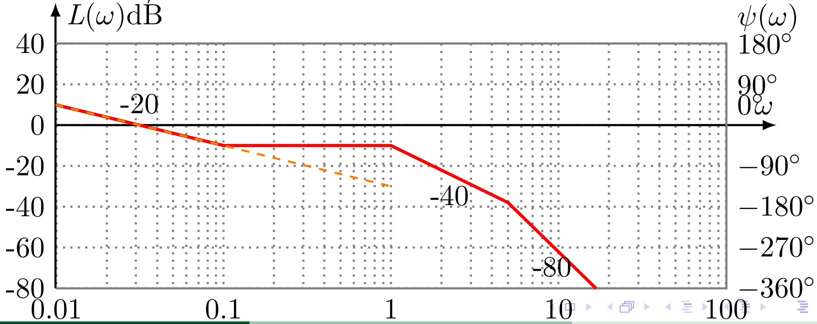
开环系统对数频率特性 (Bode)

例 5 绘制对数频率特性 $G(s) = \dfrac{8(s+0.1)}{s(s^2+s+1)(s^2+4s+25)}$

解：(1) 标准型 $G(s) = \dfrac{\frac{8\times 0.1}{25}\left(\frac{s}{0.1}+1\right)}{s(s^2+s+1)\left[\left(\frac{s}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\cdot\frac{s}{5}+1\right]}$

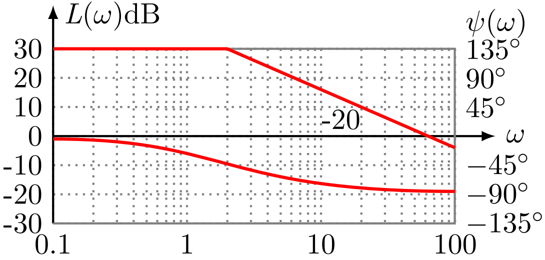
(2) 转折频率：$\omega_1 = 0.1 \to +20$，$\omega_2 = 1 \to -40$，$\omega_3 = 5 \to -40$

(3) 基准线：基点（$\omega = 1$，$20\lg 0.032 = -30\text{dB}$），斜率：$-20v = -20\text{dB/dec}$



开环系统对数频率特性 (Bode)

例 6 根据 $Bode$ 图确定系统传递函数。



解：依图有 $G(s)=\frac{K}{Ts+1}$

$20\lg K=30\rightarrow K=10^{\frac{30}{20}}=31.6$

转折频率：$\omega=2=1/T\rightarrow T=0.5$

$$G(s)=\frac{31.6}{\frac{s}{2}+1}$$

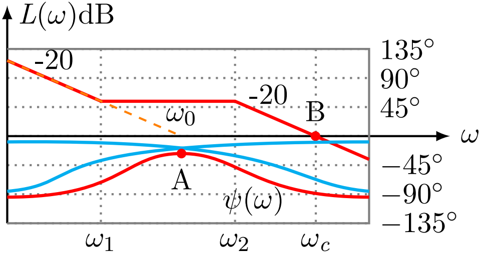
开环系统对数频率特性 (Bode)

例 7 已知 $L(w)$，写出 $G(s)$，绘制 $\psi(w)$，ω_1，ω_2，ω_c 已知。

解：(1) $G(s)=\frac{K(\frac{s}{\omega_1}+1)}{s(\frac{s}{\omega_2}+1)}$

$20\lg\frac{\omega_c}{\omega_2}=20\lg\frac{\omega_0}{\omega_1}\to\omega_0=\frac{\omega_1\omega_c}{\omega_2}$ $\quad\therefore k^1=\omega_0=\frac{\omega_1\omega_c}{\omega_2}$ 结论：起始段或其延长线与 ω 轴交点坐标 $\omega_0=k^{\frac{1}{v}}$

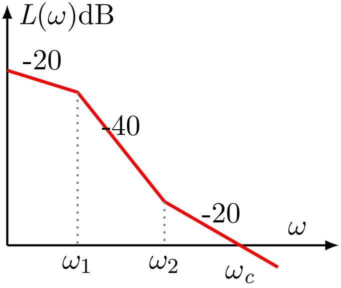
(2) 相频叠加作图如下



开环系统对数频率特性 (Bode)

例 8 开环系统 $Bode$ 图如图所示，求 $G(s)$。

解：



$$G(s) = \frac{K(\frac{s}{\omega_2}+1)}{s(\frac{s}{\omega_1}+1)}$$

$$L(\omega_c) = 20\lg\left|\frac{K\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega_2}\right)^2+1}}{\omega_c\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega_1}\right)^2+1}}\right| \approx 20\lg\frac{K\frac{\omega_c}{\omega_2}}{\omega_c\frac{\omega_c}{\omega_1}} = 0 \rightarrow K = \frac{\omega_c\omega_2}{\omega_1}$$

注意：开环增益 K 也可以利用渐进幅频特性的表达式确定

开环系统对数频率特性 (Bode)

例 9 根据 $Bode$ 图确定系统传递函数。

解：依图有

$$G(s)=\frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+2\xi\frac{s}{\omega_n}+1}$$

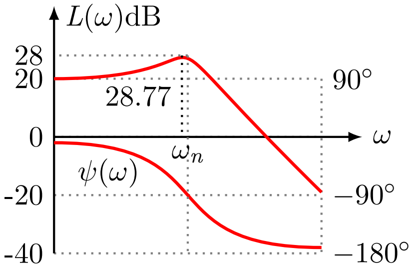
$$20\lg K=20\rightarrow K=10$$

$$\begin{cases}20\lg M_r=20\lg\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}=8\text{dB}\\ \omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}=28.77\end{cases}$$

$$2\xi\sqrt{1-\xi^2}=-10^{\frac{8}{20}}=-2.512$$

$$\xi^4-\xi^2-1.5774=0$$

$$\rightarrow\xi_1=0.979,\ \xi_2=0.203$$



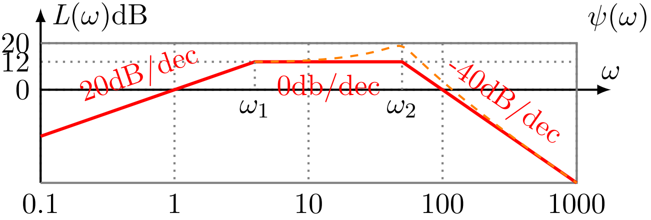
$$\omega_n=\frac{\omega_r}{\sqrt{1-2\xi^2}}=30$$

$$G(s)=\frac{10\times 30^2}{s^2+2\times 0.203\times 30s+30^2}$$

$$=\frac{9000}{s^2+12.18s+900}$$

开环系统对数频率特性（Bode)

例 10 已知最小相位系统的对数幅频渐近曲线如图所示。曲线部分是对谐振峰值附近的修正线，试确定系统的传递函数, 并求出 ω_1 和 ω_2 的值。



解：$G(s)H(s) = \dfrac{Ks}{(T_1 s+1)(T_2^2 s^2+2T_2\xi s+1)} \qquad K=1$

$20\lg\omega_1 = 12\text{dB} \rightarrow \omega_1 = 10^{\frac{12}{20}} = 3.98$

$\dfrac{0-12}{\lg 100-\lg\omega_2} = -40 \rightarrow \omega_2 = 100\times 10^{-\frac{12}{40}} = 50.1$

$20\lg\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 8\text{dB} \rightarrow \xi_1 = 0.203,\quad \cancel{\xi_2 = 0.980}$

开环系统对数频率特性 (Bode)

例 11 已知最小相位系统 $\psi(\omega)$ 表达式，求 $G(s)$。

$$\psi = \arctan\omega - 90^\circ - \arctan\frac{\omega}{2} - \arctan\frac{2\omega}{1-4\omega^2}$$

解：

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K(s+1)}{s(\frac{s}{2}+1)[(2s)^2+2s+1]} \\ &= \frac{K(s+1)}{s(\frac{s}{2}+1)[(\frac{s^2}{0.5^2})+2\times 0.5\times\frac{s}{0.5}+1]} \end{aligned}$$

注意：K 不影响 $\psi(\omega)$ 表达式。

开环系统对数频率特性 (Bode)

非最小相位系统

在右半 s 平面存在开环零点或开环极点的系统

- 非最小相角系统未必不稳定
- 最小相角系统由 $L(\omega)$ 可以惟一确定 $G(s)$
- 非最小相角系统由 $L(\omega)$ 不能惟一确定 $G(s)$

课程小结

绘制开环系统 $Bode$ 图的步骤

(1) 化 $G(j\omega)$ 为尾 1 标准型

(2) 顺序列出转折频率

(3) 确定基准线 (第一转折频率之左的特性及其延长线)

$$\begin{cases} \text{基准点} \ (\omega = 1,\ L(1) = 20\lg K) \\ \text{斜率} \ -20v\ \text{dB/dec} \end{cases}$$

(4) 叠加作图

$$\begin{cases} \text{一阶} \begin{cases} \text{惯性环节} & \text{-20dB/dec} \\ \text{复合环节} & \text{+20dB/dec} \end{cases} \\ \text{二阶} \begin{cases} \text{震荡环节} & \text{–40dB/dec} \\ \text{复合环节} & \text{-40dB/dec} \end{cases} \end{cases}$$

(5) 修正

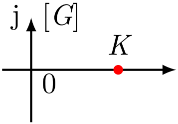
接下来...

1. 频率特性的基本概念
   - 频率特性 $G(j\omega)$ 的定义
   - 频率特性 $G(j\omega)$ 的图解表示
2. 对数频率特性（Bode 图）
   - 典型环节的 Bode 图
   - 开环系统对数频率特性（Bode）
3. 幅相频率特性（Nyquist 图）
   - 典型环节的幅相频率特性
   - 系统开环幅相曲线
4. 频域稳定判据
   - 幅角原理
   - 奈奎斯特稳定判据
   - 对数稳定判据
5. 稳定裕度
   - 稳定裕度的定义
   - 稳定裕度的计算

幅相频率特性（Nyquist）

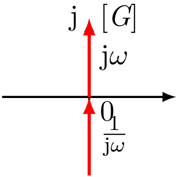
(1) 比例环节

$$G(s) = K \quad G(j\omega) = K \begin{cases} |G| = K \\ \angle G = 0^\circ \end{cases}$$



(2) 微分环节

$$G(s) = s \quad G(j\omega) = j\omega \begin{cases} |G| = \omega \\ \angle G = 90^\circ \end{cases}$$

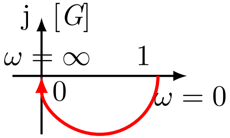


(3) 积分环节

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \begin{cases} |G| = \frac{1}{\omega} \\ \angle G = -90^\circ \end{cases}$$

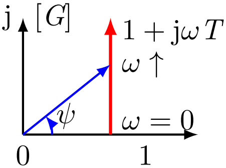
幅相频率特性（Nyquist）

(4) 惯性环节 $G(s)=\frac{1}{Ts+1}$ $G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T}\begin{cases}|G|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\\ \angle G=-\arctan\omega T\end{cases}$



$\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T}$

(5) 一阶复合微分 $G(s)=Ts+1$ $G(\mathrm{j}\omega)=1+\mathrm{j}\omega\begin{cases}|G|=\sqrt{1+\omega^2T^2}\\ \angle G=\arctan\omega T\end{cases}$



幅相频率特性（Nyquist）

(6) 震荡环节

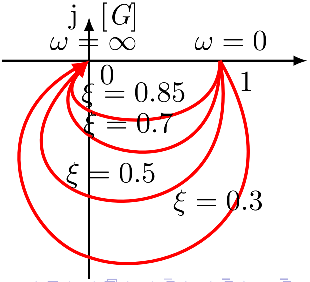
$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{(\frac{s}{\omega_n})^2+2\xi\frac{s}{\omega_n}+1}$$

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+\mathrm{j}2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}=\frac{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})-\mathrm{j}2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+(\mathrm{j}2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

$$\begin{cases}|G|=\dfrac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}\\ \angle G=-\arctan\dfrac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\end{cases}$$

$G(\mathrm{j}0)=1\angle 0°$

$G(\mathrm{j}\infty)=0\angle-180°$



幅相频率特性（Nyquist）

谐振频率 ω_r 和谐振峰值 M_r

$$|G| = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}|G| = 0$$

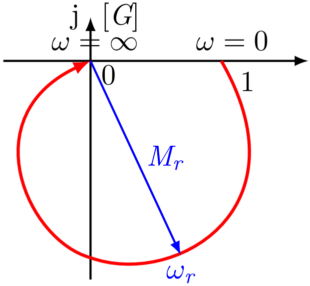
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2\right] = 0$$

$$2(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})(-2\frac{\omega}{\omega_n^2}) + 2(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})(\frac{2\xi}{\omega_n}) = 0$$

$$\frac{4\omega}{\omega_n^2}(-1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\xi^2) = 0$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1-2\xi^2$$

$$\begin{cases} \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ M_r = |G(\mathrm{j}\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases}$$

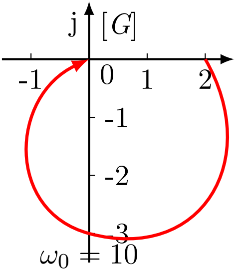


例：当 $\xi = 0.3$，$\omega_n = 1$ 时

$$\begin{cases} \omega_r = 1\times\sqrt{1-2\times 0.3^2} = 0.9055 \\ M_r = \frac{1}{2\times 0.3\sqrt{1-0.3^2}} = 1.832 \end{cases}$$

幅相频率特性（Nyquist）

例 12 系统的幅相曲线如图所示，求传递函数。



由曲线形状有

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1}$$

$$\begin{cases} |G| = \dfrac{K}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}} \\ \angle G = -\arctan\dfrac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \end{cases}$$

由起点：$G(\mathrm{j}0) = K\angle 0^\circ \quad K = 2$

由 $\psi(\omega_0)$：$\angle G(\mathrm{j}\omega_0) = -90^\circ \quad \omega_0 = \omega_n = 10$

由 $|G(\omega_0)|$：$|G(\omega_0)| = 3 \overset{\omega_0=\omega_n}{=\!=} \frac{K}{2\xi} = \frac{2}{2\xi} \quad \xi = \frac{1}{3}$

$$G(s) = \frac{2\times 10^2}{s^2 + 2\times\frac{1}{3}\times 10s + 10^2} = \frac{200}{s^2 + 6.67s + 100}$$

接下来...

系统开环幅相曲线

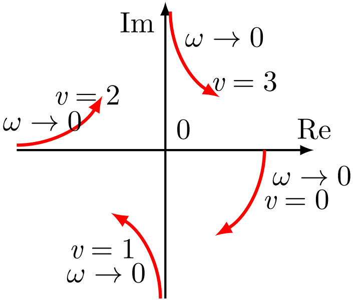
$$G(s)H(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^v(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}\quad (n>m)$$

$$G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{K(\mathrm{j}\tau_1\omega+1)(\mathrm{j}\tau_2\omega+1)\cdots(\mathrm{j}\tau_m\omega+1)}{(\mathrm{j}\omega)^v(\mathrm{j}T_1\omega+1)(\mathrm{j}T_2\omega+1)\cdots(\mathrm{j}T_n\omega+1)}$$

(1) 起点（低频段）:

$$G(\mathrm{j}0^+)H(\mathrm{j}0^+)=\lim_{\omega\to 0^+}\frac{K}{(\mathrm{j}\omega)^v}$$

可得低频段乃氏图:



系统开环幅相曲线

(2) 终点（高频段）：$\omega \to \infty$

$$\lim_{\omega\to+\infty} G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega) = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{K(\mathrm{j}\omega)^m}{(\mathrm{j}\omega)^n} = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{K}{(\mathrm{j}\omega)^{n-m}} \quad (n > m)$$

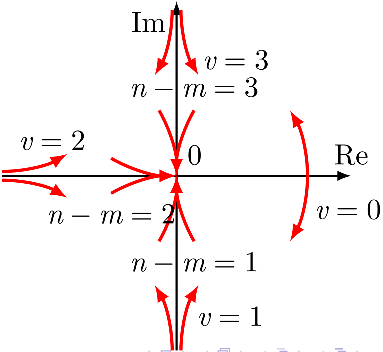
终点处幅值：

$$\lim_{\omega\to+\infty} |G(\mathrm{j}\omega)| = 0$$

终点处相角：

$$\lim_{\omega\to+\infty} \angle G(\mathrm{j}\omega) = (n-m)(-\frac{\pi}{2})$$

* 对于由最小相位环节组成的开环系统



系统开环幅相曲线

(3) 与负实轴交点：试探法

方法 1

令 $\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)] = 0 \rightarrow \omega_g \rightarrow \mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega_g)]$

方法 2

令 $\angle G(\mathrm{j}\omega) = -180^\circ \rightarrow \omega_g \rightarrow |G(\mathrm{j}\omega_g)|$

ω_g : $\angle G(\mathrm{j}\omega_g) = 180^\circ$ 相角穿越频率

ω_c : $|G(\mathrm{j}\omega_c)| = 1$, $L(\mathrm{j}\omega) = 0\mathrm{dB}$ 幅值穿越频率，截止频率

概略绘制极坐标图步骤：

(1) 由开环频率特性 $G(\mathrm{j}\omega)$ 求出幅频特性 $|G(\mathrm{j}\omega)|$ 和相频特性 $\angle G(\mathrm{j}\omega)$，或实频特性 $\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]$ 和虚频特性 $\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]$。

(2) 求特征点。起点 $G(\mathrm{j}0) = \begin{cases} K & v=0 \\ \infty & v \neq 0 \end{cases}$ ，$\angle G(\mathrm{j}0) = v(-90^\circ)$

终点 $n > m \quad G(\mathrm{j}\infty) = 0\angle -90^\circ(n-m)$

与负实轴交点：试探

方法 1，令 $\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)] = 0 \to \omega_g \to \mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega_g)]$

方法 2，令 $\angle G(\mathrm{j}\omega) = -180^\circ \to \omega_g \to |G(\mathrm{j}\omega_g)|$

当 $v=1$ 求 $\omega \to 0$ 时实部渐近线 $V_x = \lim_{\omega\to 0} \mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]$

(3) 根据 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的变化趋势，所在象限和单调性，绘制大概形状。$G(\mathrm{j}\omega)$ 不含零点时，模值和相位一般会单调收缩，当有零点时，曲线可能会扭曲。

例 13 $G(s)=\frac{10}{(0.1s+1)(s+1)}$，绘制概略极坐标图

解：

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{10}{(1+0.1\mathrm{j}\omega)(1+\mathrm{j}\omega)}$$

$$|G(\mathrm{j}\omega)|=\frac{10}{\sqrt{1+(0.1\omega)^2}\sqrt{1+\omega^2}}$$

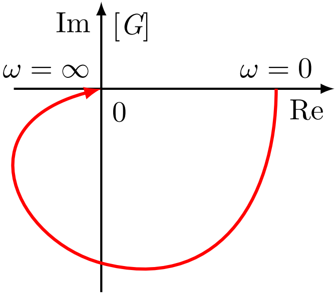
$\psi(\mathrm{j}\omega)=-\arctan 0.1\omega-\arctan\omega$

$G(\mathrm{j}0)=10\angle 0°$

$\psi(\mathrm{j}\infty)=(n-m)\times(-90°)=-180°$

分析:$\omega:0\rightarrow+\infty$，$\psi(\mathrm{j}\omega):0°\rightarrow-180°$

因为不含零点，幅值和相位均单调收缩



0 型二阶系统的奈氏图

例 14 $G(s)=\frac{10}{s(s+1)}$，绘制概略极坐标图

解：

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{10}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega)}$$

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{-10\mathrm{j}(1-\mathrm{j}\omega)}{-\mathrm{j}^2\omega(1+\mathrm{j}\omega)(1-\mathrm{j}\omega)}$$

$$=\frac{-10\omega-10\mathrm{j}}{\omega(1+\omega^2)}=\frac{-10}{1+\omega^2}-\mathrm{j}\frac{10}{\omega+\omega^3}$$

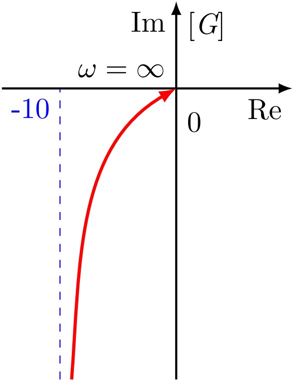
当 $\omega=0^+$ 时，$G(\mathrm{j}0^+)=\infty\angle-90^\circ$

当 $\omega\to\infty$ 时，$G(\mathrm{j}\infty)=0\angle-180^\circ$

$\lim_{\omega\to0^+}\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}\omega)]=-10$

分析:$\omega:0\to+\infty$，$\psi(\mathrm{j}\omega):-90^\circ\to-180^\circ$

因为不含零点，幅值和相位均单调收缩



I 型二阶系统的奈氏图

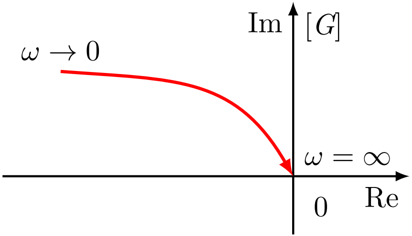
例 15 $G(s)=\frac{10}{s^2(s+1)}$，绘制概略极坐标图

解：

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{10}{(\mathrm{j}\omega)^2(1+\mathrm{j}\omega)}$$

$$|G(\mathrm{j}\omega)|=\frac{10}{\omega^2\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\psi(\omega)=-180^\circ-\arctan\omega$$



II 型二阶系统的奈氏图

当 $\omega=0^+$ 时，$G(\mathrm{j}0^+)=\infty\angle-180^\circ$
当 $\omega\to\infty$ 时，
$G(\mathrm{j}\infty)=0\angle-90^\circ(n-m)=0\angle-270^\circ$
分析:$\omega:0\to+\infty$，$\psi(\mathrm{j}\omega):-180^\circ\to-270^\circ$
因为不含零点，幅值和相位均单调收缩

例 16 $G(s)=\frac{5}{s(s+1)(2s+1)}$，绘制概略极坐标图

解：

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{5}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega)(1+\mathrm{j}2\omega)}=\frac{-\mathrm{j}5(1-\mathrm{j}\omega)(1-\mathrm{j}2\omega)}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

$$=\frac{-15}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}-\mathrm{j}\frac{5(1-2\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

$$G(\mathrm{j}0)=\infty\angle-90^\circ$$

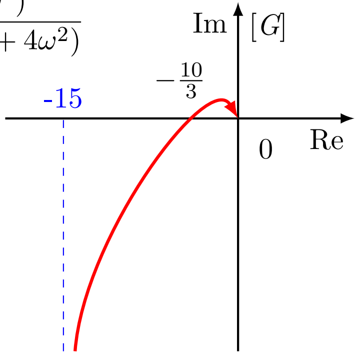
$$G(\mathrm{j}\infty)=0\angle-270^\circ$$

渐近线：$\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}0)]\to-15$

与实轴交点：$\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]=0\to$

穿越频率 $\omega_g=1/\sqrt{2}=0.707$

$\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}0.707)]=\frac{-15}{(1+0.5)(1+4\times0.5)}=-\frac{10}{3}$



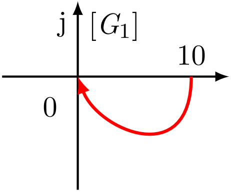
例 17 绘制概略极坐标图

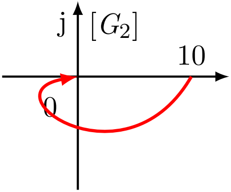
(1) $G_1(s) = \dfrac{10}{2s+1}$

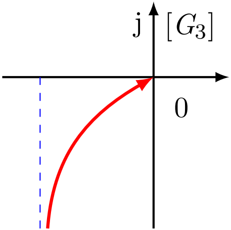
(2) $G_2(s) = \dfrac{10}{(2s+1)(5s+1)}$

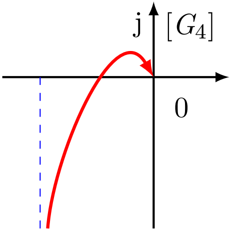
(3) $G_3(s) = \dfrac{10}{s(2s+1)}$

(4) $G_4(s) = \dfrac{10}{s(2s+1)(5s+1)}$









频域稳定判据

系统稳定的充要条件—全部闭环极点均具有负的实部

代数稳定判据—Ruoth 判据

- 由闭环特征多项式系数（不解根）判定系统稳定性
- 不能用于研究如何调整系统结构参数来改善系统稳定性及性能的问题

频域稳定判据—Nyquist 判据，对数稳定判据

- 由开环频率特性直接判定闭环系统的稳定性
- 可研究如何调整系统结构参数改善系统稳定性及性能问题

接下来...

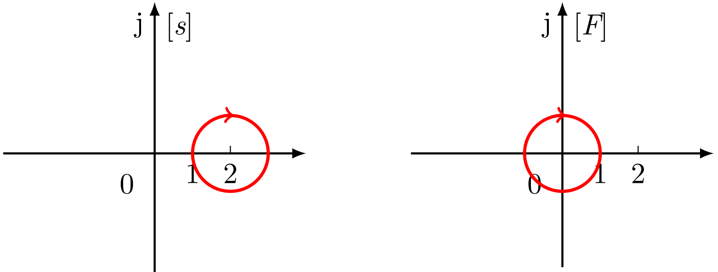
幅角原理

设函数 $F(s)$ 在 s 平面上任一闭合曲线 Γ_s 上处处解析且不为 0，即曲线 Γ_s 上任意点都不是 $F(s)$ 的零点或极点。如果曲线 Γ_s 包围 $F(s)$ 的 Z 个零点和 P 个极点，则当动点 s_1 在 s 平面上顺时针沿 Γ_s 绕一周时，在 $F(s)$ 平面上也将映射出一条闭合曲线 Γ_F，且包围原点的圈数 $R=P-Z$。

- $R<0$，顺时针包围 F 平面原点
- $R>0$，逆时针包围 F 平面原点
- $R=0$，不包围 F 平面原点

幅角原理

例 18 选 $F(s) = s - 2$。
选择曲线 Γ_s，围绕 $F(s)$ 的一个零点



s 平面上的曲线 Γ_s

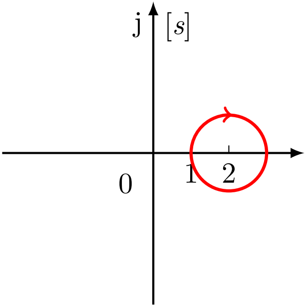
$R = P - Z = 0 - 1 = -1$

Γ_s 在 F 平面上的映射 Γ_F

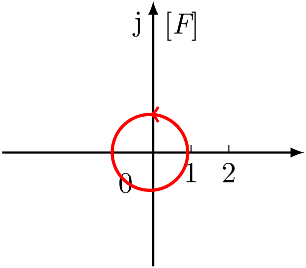
结论: Γ_s 按顺时针方向围绕 $F(s)$ 的一个零点，则其在 $F(s)$ 平面上的映射曲线 Γ_F 亦按顺时针方向围绕 $F(s)$ 平面的坐标原点旋转一周。

幅角原理

例 19 选 $F(s)=\frac{1}{s-2}$。
选择曲线 Γ_s，围绕 $F(s)$ 的一个极点



s 平面上的曲线 Γ_s



$R=P-Z=1-0=1$

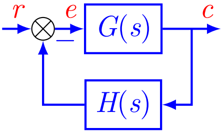
Γ_s 在 F 平面上的映射 Γ_F

结论: Γ_s 按顺时针方向围绕 $F(s)$ 的一个极点, 则其在 $F(s)$ 平面上的映射曲线 Γ_F 按逆时针方向围绕 $F(s)$ 平面的坐标原点旋转一周。

接下来...

奈奎斯特稳定判据

1、辅助函数选择



$$
\begin{aligned}
F(s) &= 1 + GH(s) \\
&= 1 + \frac{K^* M(s)}{N(s)} = \frac{N(s) + K^* M(s)}{N(s)} \\
&= \frac{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3) + K^* M(s)}{(s-p1)(s-p_2)(s-p_3)} \\
&= \frac{D(s)}{N(s)} = \frac{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}
\end{aligned}
$$

$$
\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+GH(s)}
$$

$$
F(s)\ \text{的特点}\begin{cases} F(s)\text{的}\left\{\begin{array}{l}\text{零点}\lambda_i\text{闭环极点} \\ \text{极点}p_i\text{开环极点}\end{array}\right\}\text{个数相同} \\ F(\mathrm{j}\omega) = 1 + GH(\mathrm{j}\omega) \end{cases}
$$

奈奎斯特稳定判据

$F(s)$ 的特点

(1) $F(s)$的 $\left\{ \begin{array}{c} \text{零点}\lambda_i\text{闭环极点} \\ \text{极点}p_i\text{开环极点} \end{array} \right\}$ 个数相同

(2) 在s平面内选择一条包围整个右半平面的闭合曲线Γ_s（包围P个右半平面开环极点）；

然后在F平面绘制Γ_F，并确定Γ_F围绕原点周数R，

就可由幅角原理$Z = P - R$，确定是否有$F(s)$的零点（闭环极点）在右半s平面（系统稳定性）。

(3) $F(s) = 1 + GH(s)$

Γ_F可以由Γ_{GH}沿实轴正向平移 1 个单位得到。

Γ_F包围原点圈数就等于Γ_{GH}包围$(-1, \mathrm{j}0)$点圈数。

奈奎斯特稳定判据

2、Γ_s 的选择：奈氏路径，包围右半平面

$v=0$，由 (1)(2)(3) 组成；

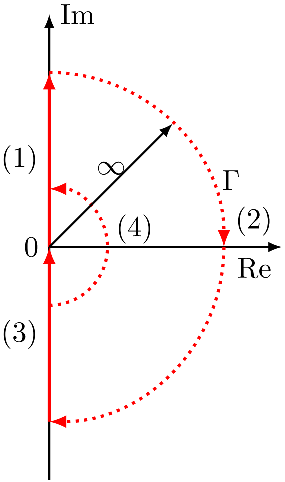
$v\neq 0$，由 (1)(2)(3)(4) 组成；

(1) $s=\mathrm{j}\omega,\ \omega=0^+\to+\infty$

(2) $s=\lim_{R\to\infty}Re^{\mathrm{j}\theta},\ \theta:\frac{\pi}{2}\to 0\to-\frac{\pi}{2}$

(3) $s=\mathrm{j}\omega,\ \omega=-\infty\to 0^-$

(4) $v\neq 0,\ s=\lim_{r\to 0}re^{\mathrm{j}\psi},\ \psi:-\frac{\pi}{2}\to 0\to\frac{\pi}{2}$



奈奎斯特稳定判据

3、Γ_{GH} 的绘制

Γ_{GH} 的绘制可以分别考虑 Γ_s 四个组成部分在 GH 平面上的映射。

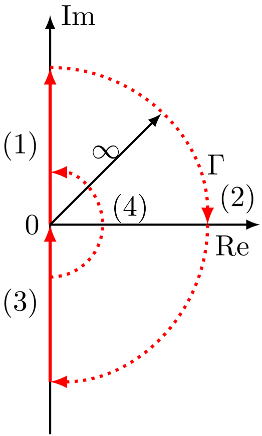
(1) $s = \mathrm{j}\omega$, $\omega = 0^+ \to +\infty$

$G(s)H(s) = G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$，即为开环幅相曲线，极坐标图

(2) $s = \lim_{R\to\infty} R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$, $\theta : \frac{\pi}{2} \to 0 \to -\frac{\pi}{2}$

$G(s)H(s) = \lim_{R\to\infty} \frac{K^*}{(R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})^{n-m}} = 0.\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-m)\theta}$, $n > m$

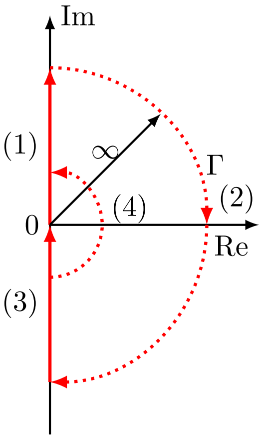
对应原点，一般为开环幅相曲线终点。



奈奎斯特稳定判据

(3) $s = \mathrm{j}\omega,\ \omega = -\infty \to 0^-$
$G(s)H(s) = G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$，与开环幅相曲线关于实轴对称。

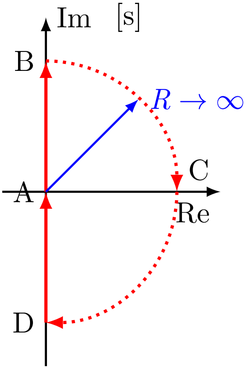
(4) $v \neq 0,\ s = \lim_{r\to 0} re^{\mathrm{j}\psi},\ \psi : -\frac{\pi}{2} \to 0 \to \frac{\pi}{2}$
$G(s)H(s) = \lim_{r\to 0} \frac{K}{(re^{\mathrm{j}\psi})^v} = \infty.e^{-\mathrm{j}v\psi}$

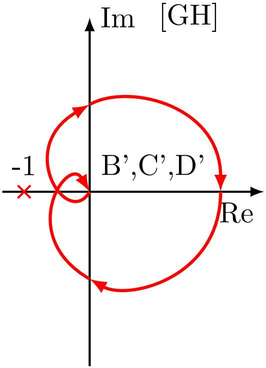


Γ_s 在原点附近，当 ω 从 $0 \to 0^+$，Γ_{GH} 为从起点 $G(\mathrm{j}0)H(\mathrm{j}0)$ 起顺时针旋转 $v * 180°$，半径 ∞ 到达 $G(\mathrm{j}0^+)H(\mathrm{j}0^+)$

例 20 已知 0 型系统开环传递函数，绘制奈奎斯特图

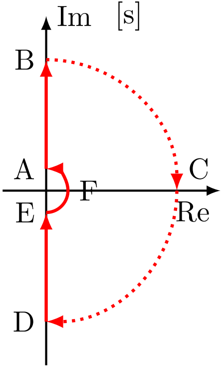
$$G(s)H(s) = \frac{6}{(s+1)(0.5s+1)(0.2s+1)}$$

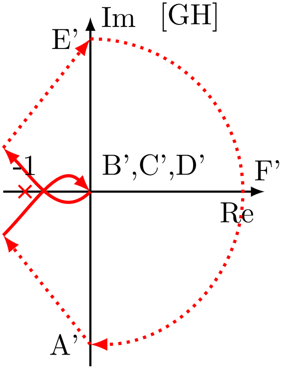




例 21 已知 I 型系统开环传递函数，绘制奈奎斯特图

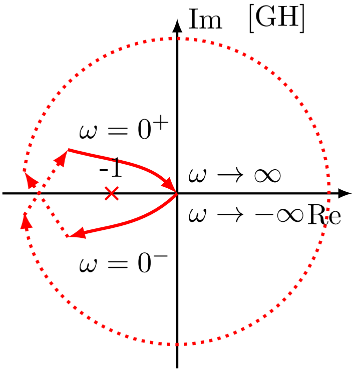
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$





例 22 已知 II 型系统开环传递函数，绘制奈奎斯特图

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$$



奈奎斯特稳定判据

4、Nyquist 稳定性判据

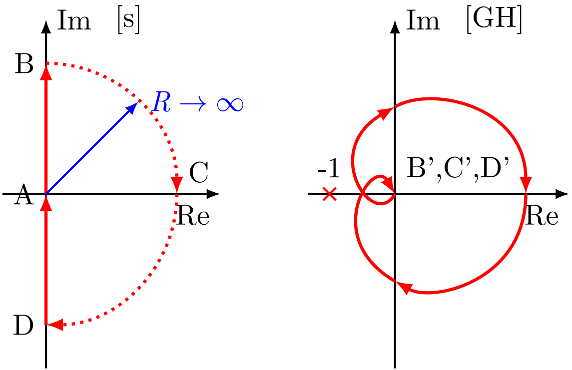
分析: 系统稳定时, 右半平面无闭环极点，即 $F(s)$ 右半平面无开环零点，即 Γ_s 包围 $F(s)$ 的零点数 $Z=0$。

所以系统稳定时，$R=P-Z=P$，即 Γ_F 按逆时针方向围绕原点周数 R 等于右半平面开环极点数 P，即 Γ_{GH} 逆时针包围点 $(-1,\mathrm{j}0)P$ 周。

负反馈系统稳定的充要条件：Nyquist 曲线 Γ_{GH} 不通过 $(-1,\mathrm{j}0)$ 点，且逆时针围绕 $(-1,\mathrm{j}0)$ 点的周数 R，等于右半平面的开环极点数 P（不计虚轴上的极点），即 $R=P$。

例 23 已知 0 型系统开环传递函数，Nyquist 判据判定稳定性

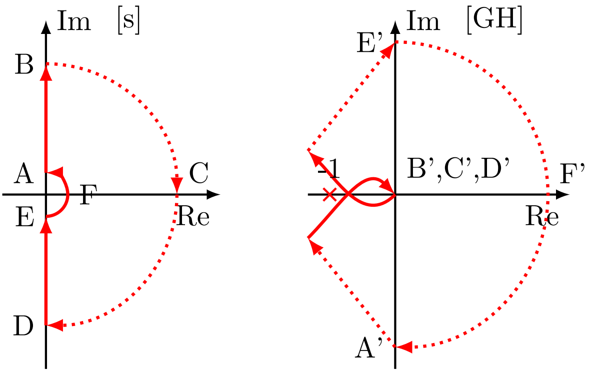
$$G(s)H(s) = \frac{6}{(s+1)(0.5s+1)(0.2s+1)}$$



$R = 0 = P$ 稳定

例 24 已知 I 型系统开环传递函数，Nyquist 判据判定稳定性

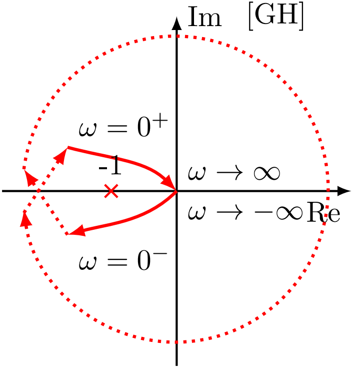
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$



$R = 0 = P$ 稳定

例 25 已知 II 型系统开环传递函数，Nyquist 判据判定稳定性

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$$



$R = -2,\ P = 0$ 不稳定

奈奎斯特稳定判据

5、实用结论：

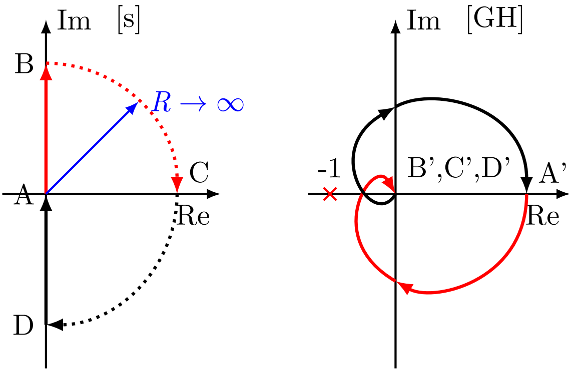
考虑到对称性，只要绘制闭合曲线 Γ_{GH} 的一半，即半闭合 Nyquist 曲线。

(1) 先画出开环幅相曲线 $G(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$，即 $\omega \in (0^+, \infty)$ 时的映射。

(2) 若存在 v 个积分环节，则将曲线起点 $G(\mathrm{j}0^+)H(\mathrm{j}0^+)$ 逆时针旋转 v 个 90°，补上 $\omega \in (0^+, 0)$ 的映射，即得到 $\omega \in (0, +\infty)$ 时 Γ_s 在平面 GH 的映射，即半个 Γ_{GH}。

例 26 已知 0 型系统开环传递函数，Nyquist 判据判定稳定性

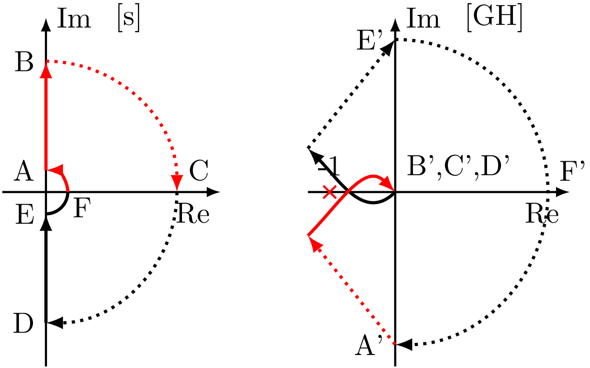
$$G(s)H(s)=\frac{6}{(s+1)(0.5s+1)(0.2s+1)}$$



$R=0=P$ 稳定

例 27 已知 I 型系统开环传递函数，Nyquist 判据判定稳定性

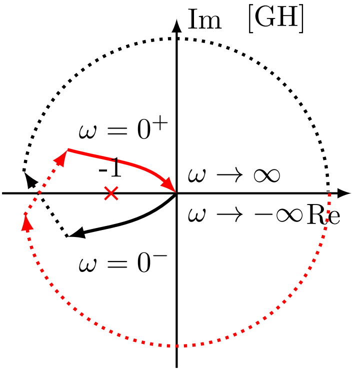
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$



$R = 0 = P$ 稳定

例 28 已知 II 型系统开环传递函数，Nyquist 判据判定稳定性

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$$



$R = -2,\ P = 0$ 不稳定

奈奎斯特稳定判据

6、按正负穿越计算闭合曲线 Γ_{GH} 包围 $(-1, j0)$ 点圈数 R

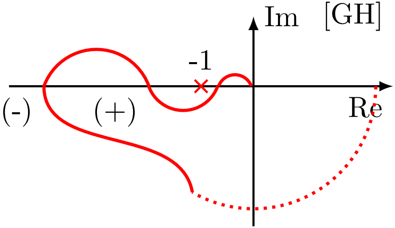
可由半闭合 Nyquist 曲线获得。

设 N 为半闭合曲线穿越负实轴段 $(-\infty, -1)$ 次数（若包围，必相交，称为穿越）。

- N^+：正穿越次数之和，从上向下，逆时针包围
- N^-：负穿越次数之和，从下向上，顺时针包围

则：$N = N^+ - N^-$

闭合曲线:$R = 2N = 2(N^+ - N^-)$



$N = 1 - 1 = 0$

奈奎斯特稳定判据

7、简化的 Nyquist 稳定性判据：

若半闭合 Nyquist 曲线不通过点 $(-1, \mathrm{j}0)$，且穿越负实轴段 $(-\infty, -1)$ 次数 $N = P/2$，则系统闭环稳定。P 为右半平面开环极点数目。

若 $N \neq P/2$，则闭环不稳定。不稳定根个数为 $Z = P - R$。

奈奎斯特稳定判据

注意问题

(1) 当 $[s]$ 平面虚轴上有开环极点时，奈氏路径要从其右边绕出半径为无穷小的圆弧；$[GH]$ 平面对应要补充大圆弧；

(2) 只有穿越实轴段 $(-\infty,-1)$ 才算，其它段不算；

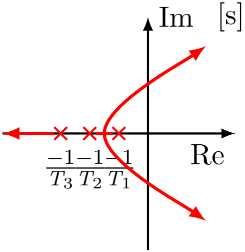
(3) N 的最小单位为二分之一。从实轴段 $(-\infty,-1)$ 起始或终止于实轴段 $(-\infty,-1)$ 算穿越半次。起始点向下 $N=+0.5$，向上 $=-\ 0.5$。终止点从上向下 $N=\ 0.5$，从下向上 $N=-0.5$。

(4) $$Z\begin{cases} >0 & \text{闭环系统不稳定} \\ =0 & \text{闭环系统稳定} \\ <0 & \text{有误!} \end{cases}$$

奈氏判据的应用 (1)

例 29 已知单位反馈系统开环传递函数，分析系统稳定性。

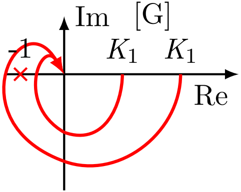
$$G(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$$



解：依题有 $\begin{cases} G(j0)=K\angle 0^\circ \\ G(j\infty)=0\angle-270^\circ \end{cases}$

$$K=\begin{cases} K_1(小)\ N=0=P/2(稳定) \\ K_2(大)\ N=-1\neq P/2(不稳定) \\ Z=P-2N=0-2(-1)=2 \end{cases}$$

注：ω_g 与 K 无关，但 $|G(\omega_g)|$ 与 K 成正比



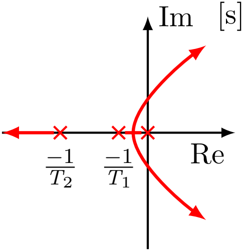
奈氏判据的应用 (2)

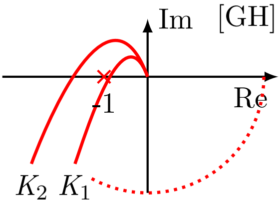
例 30 已知系统开环传递函数，分析系统稳定性，求临界值。

$$G(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

解：依题有 $\begin{cases} G(\mathrm{j}0)=\infty\angle 0^\circ \\ G(\mathrm{j}0^+)=\infty\angle-90^\circ \\ G(\mathrm{j}\infty)=0\angle-270^\circ \end{cases}$

$$K=\begin{cases} K_1(\text{小})\ \ N=0=P/2(\text{稳定}) \\ K_2(\text{大})\ \ N=-1\neq P/2(\text{不稳定}) \\ Z=P-2N=0-2(-1)=2 \end{cases}$$

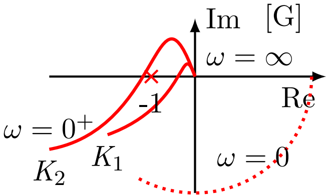




奈氏判据的应用 (3)

例 31 已知单位反馈系统开环传递函数，分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad \tau > T_1 > T_2$$



解：依题有 $\begin{cases} G(j0^+) = \infty\angle - 180^\circ \\ G(j\infty) = 0\angle - 270^\circ \end{cases}$

$$K = \begin{cases} K_1(小)\ N = 0 = P/2(稳定) \\ K_2(大)\ N = -1 \neq P/2(不稳定) \\ Z = P - 2N = 0 - 2(-1) = 2 \end{cases}$$

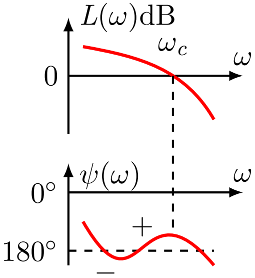
接下来...

对数稳定判据 (1)

$v=0$ 时，Bode 图不变；
$v\neq 0$ 时，只要把相频曲线 $\psi(\omega)$ 的起点 $\omega\to 0^+$ 向上提升 v 个 90°

在 [GH] 平面穿越是指 $|GH(\mathrm{j}\omega)|>1$ 时 $GH(\mathrm{j}\omega)$ 穿越负实轴。对应地，在 Bode 图发生穿越就是 $L(\omega)>0$ 时，（提升后的）相频特性穿越 $180*v$ 线。

正穿越：相位增加（$\omega\uparrow$）
负穿越：相位减少（$\omega\uparrow$）

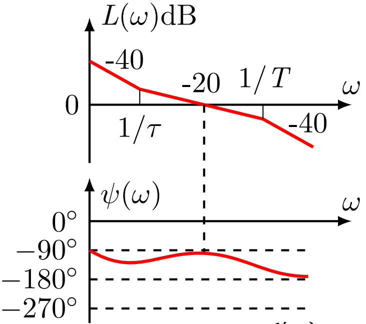


穿越次数计算
正穿越一次：$L(\omega)>0$ 时，相频曲线由下向上穿越 $-180*v$ 线一次负穿越一次：$L(\omega)>0$ 时，相频曲线由上向下穿越 $-180*v$ 线一次

对数稳定判据 (2)

例 32 已知单位反馈系统开环传递函数，分析系统稳定性。

$$G(s)=\frac{K(\tau+1)}{s^2(Ts+1)}\quad (a)\ \tau>T\quad (b)\ \tau<T$$



(a) N=0=P/2, 稳定　　(b) N=-1, P=0

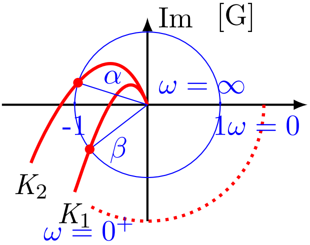
对数稳定判据 (3)

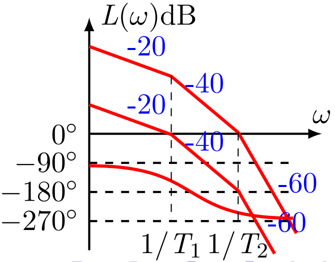
例 33 已知单位反馈系统开环传递函数，分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

对数稳定判据 $\begin{cases} Z = P - 2N \\ N = N_+ - N_- \end{cases}$

$$K = \begin{cases} K_1 \begin{cases} N = N_+ - N_- = 0 - 0 = 0 \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0 \\ \text{稳定} \end{cases} \\ K_2 \begin{cases} N = N_+ - N_- = 0 - 1 = -1 \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2 \\ \text{不稳定} \end{cases} \end{cases}$$





稳定裕度

系统动态性能

稳定程度	稳定边界	稳定指标
时域 (t)	虚轴	阻尼比 ξ
频域 (ω)	$(-1, \mathrm{j}0)$	到 $(-1, \mathrm{j}0)$ 的距离
		稳定裕度
		(开环频率指标)

接下来...

稳定裕度的定义

截止频率 ω_c $|G(\mathrm{j}\omega)| = 1$

相角裕度 γ $\gamma = 180^\circ + \angle G(\mathrm{j}\omega_c)$

相角交界频率 ω_g $\angle G(\mathrm{j}\omega_g) = -180^\circ$

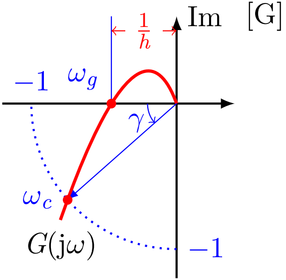
幅值裕度 h $h = \frac{1}{|G(\mathrm{j}\omega_g)|}$

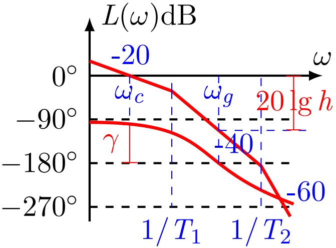
γ, h 的几何意义 $h(\mathrm{dB}) = 20\lg \frac{1}{|G(\mathrm{j}\omega_g)|}$

γ, h 的物理意义

$\left\{\begin{matrix}\gamma \\ h\end{matrix}\right.$ 系统在 $\left\{\begin{matrix}\text{相角} \\ \text{幅值}\end{matrix}\right.$ 方面的稳定储备量

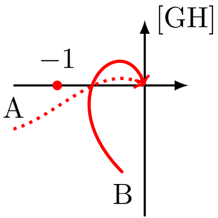
一般要求 $\left\{\begin{matrix}\gamma > 40^\circ \\ h > 2\end{matrix}\right.$



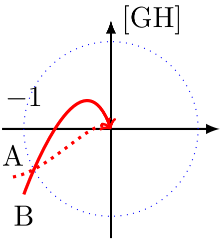


稳定裕度的定义

幅值裕度同,
相角裕度 γ 不同



幅值裕度 h 不同,
相角裕度同,



接下来...

稳定裕度的计算

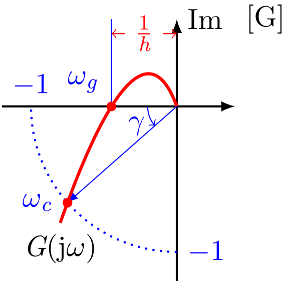
例 34 $G(s)=\frac{5}{s(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{10}+1)}=\frac{100}{s(s+2)(s+10)}$，求 γ, h

解法 I：由幅相曲线求 γ, h

(1) 令 $|G(j\omega_c)|=1=\frac{100}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+2^2}\sqrt{\omega_c^2+10^2}}$

$\omega_c^2[\omega_c^4+104\omega_c^2+400]=10000$

试根得 $\omega_c=2.9$



$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ+\angle G(j\omega_c)=180^\circ+\psi(2.9)\\ &=180^\circ-90^\circ-\arctan\frac{2.9}{2}-\arctan\frac{2.9}{10}\\ &=90^\circ-55.4^\circ-16.1^\circ=18.5^\circ\end{aligned}$$

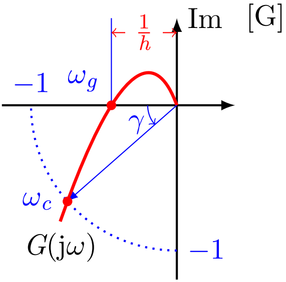
稳定裕度的计算

令

$$\psi(\omega_g) = -180^\circ = -90^\circ - \arctan\frac{\omega_g}{2} - \arctan\frac{\omega_g}{10}$$

可得 $\arctan\frac{\omega_g}{2} + \arctan\frac{\omega_g}{10} = 90^\circ$

$$\frac{\frac{\omega_g}{2} + \frac{\omega_g}{10}}{1 - \frac{\omega_g^2}{20}} = \tan 90^\circ \Rightarrow \begin{aligned} \omega_g^2 &= 20 \\ \omega_g &= 4.47 \end{aligned}$$



$$h = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = \frac{\omega_g\sqrt{\omega_g^2+2^2}\sqrt{\omega_g^2+10^2}}{100}$$

$$\overset{\omega_g=4.47}{=} 2.4\ (7.6\text{dB})$$

稳定裕度的计算

或令

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{100}{\mathrm{j}\omega(2+\mathrm{j}\omega)(10+\mathrm{j}\omega)}=\frac{-1200\omega-\mathrm{j}100(20-\omega^2)}{\omega(4+\omega^2)(100+\omega^2)}=G_x+\mathrm{j}\,G_Y$$

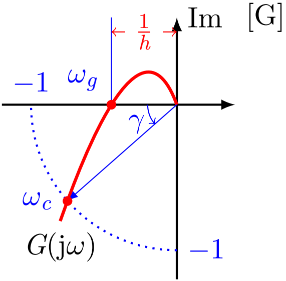
$$\text{令}\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}\omega)]=G_Y=0$$

$$\text{得}\omega_g=\sqrt{20}=4.47$$

$$\text{代入实部}G_X(\omega_g)=-0.4167$$

$$|G(\omega_g)|=0.4167$$

$$h=\frac{1}{|G(\mathrm{j}\omega_g)|}=\frac{1}{0.4167}=2.4$$



稳定裕度的计算

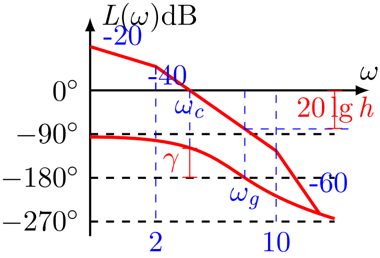
解法 II：由 Bode 图求 γ, h

$$G(s)=\frac{5}{s(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{10}+1)}$$

由 $L(\omega)$：

$|G(\mathrm{j}\omega_c)|=1=\frac{5}{\omega_c\frac{\omega_c}{2}\cdot 1}=\frac{10}{\omega_c^2}$

得 $\omega_c=\sqrt{10}=3.16>2.9$



$$\gamma=180^\circ+\angle G(\mathrm{j}\omega_c)=180^\circ+\psi(3.16)$$

$$180^\circ-90^\circ-\arctan\frac{3.16}{2}-\arctan\frac{3.16}{10}$$

$$=90^\circ-57.67^\circ-17.541^\circ=14.8^\circ<18.5^\circ$$

$$\omega_g=\sqrt{2\times 10}=4.47$$

$$h=\frac{1}{|G(\mathrm{j}4.47)|}=\frac{1}{0.4167}=2.4$$

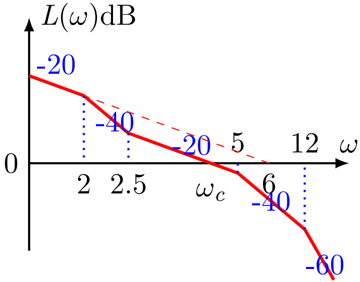
稳定裕度的计算

例 35

$$G(s)=\frac{6(\frac{s}{2.5}+1)}{s(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{5}+1)(\frac{s}{12.5}+1)}$$

求 γ， h

解：作 $L(\omega)$ 求 ω_c



$$|G(\mathrm{j}\omega_c)|=1=\frac{6\times\frac{\omega_c}{2.5}}{\omega_c\cdot\frac{\omega_c}{2}\cdot 1\cdot 1}=\frac{6\times 2}{2.5\omega_c}\quad \omega_c=\frac{6\times 2}{2.5}=4.8$$

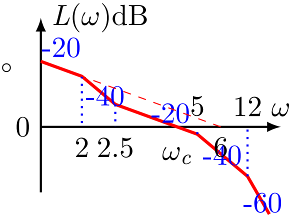
$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ+\angle G(\mathrm{j}\omega_c)\\ &= 180^\circ+\arctan\frac{4.8}{2.5}-90^\circ-\arctan\frac{4.8}{2}-\arctan\frac{4.8}{5}-\arctan\frac{4.8}{12.5}\\ &= 180^\circ+62.5^\circ-90^\circ-67.4^\circ-43.8^\circ-21^\circ=20.3^\circ\end{aligned}$$

稳定裕度的计算

$$\psi(\omega_g)=\arctan\frac{\omega_g}{2.5}-90^\circ-\arctan\frac{\omega_g}{2}-\arctan\frac{\omega_g}{5}-\arctan\frac{\omega_g}{12.5}=-180^\circ$$

$$\arctan\frac{\omega_g}{12.5}+\arctan\frac{\omega_g}{5}+\arctan\frac{\omega_g}{2}-\arctan\frac{\omega_g}{2.5}=90^\circ$$

$$\arctan\left[\frac{\frac{\omega_g}{12.5}+\frac{\omega_g}{5}}{1-\frac{\omega_g^2}{12.5\times5}}\right]+\arctan\left[\frac{\frac{\omega_g}{2}-\frac{\omega_g}{2.5}}{1+\frac{\omega_g^2}{2\times2.5}}\right]=90^\circ$$



$$\arctan\frac{[A]+[B]}{1-[A]\cdot[B]}=90^\circ\Rightarrow[A]\cdot[B]=1$$

整理得 $\omega_g^4-49.75\omega_g^2-312.5=0$，解出 $\omega_g=7.4(\mathrm{rad/s})$

$$h=\frac{1}{|G(\mathrm{j}\omega_g)|}=\frac{\omega_g\sqrt{\omega_g^2+2^2}\sqrt{\omega_g^2+5^2}\sqrt{\omega_g^2+12.5^2}}{300\cdot\sqrt{\omega_g^2+2.5^2}}=3.135$$

课程小结

(1) 稳定裕度的概念：(开环频率指标)

(2) 稳定裕度的定义
$$\begin{cases} \text{截止频率}\omega_c & |G(\mathrm{j}\omega_c)| = 1 \\ \text{相角裕度}\gamma & \gamma = 180^\circ + \angle G(\mathrm{j}\omega) \\ \text{穿越频率}\omega_g & \angle G(\mathrm{j}\omega_g) = -180^\circ \\ \text{幅值裕度}h & \frac{1}{|G(\mathrm{j}\omega_g)|} \end{cases}$$

(3) 稳定裕度的意义
$$\begin{cases} \gamma, h\text{的几何意义} \\ \gamma, h\text{的物理意义} \end{cases}$$

(4) 稳定裕度计算方法
$$\begin{cases} L(\omega) \Rightarrow \omega_c \Rightarrow \gamma = 180^\circ + \psi(\omega_c) \\ \psi(\omega) = -180^\circ \Rightarrow \omega_g \Rightarrow h = \frac{1}{|G(\mathrm{j}\omega_g)|} \end{cases}$$

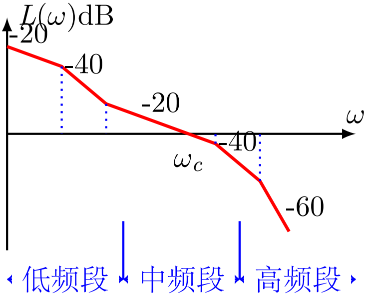
利用开环频率特性分析系统的性能

三频段理论

1. $L(\omega)$ 低频段 $\leftrightarrow$ 系统稳态误差 e_{ss}

$L(\omega)$ 低频段：通常最小转折频率之前 $G_0(s)=\frac{K}{s^v}$

$$\begin{cases} 20\lg|G_0| = 20\lg K - v\cdot 20\lg\omega \\ \angle G_0 = -v\cdot 90^\circ \end{cases}$$



2. $L(\omega)$ 中频段 $\leftrightarrow$ 系统动态性能 $(\sigma\%, t_s)$，ω_c 附近

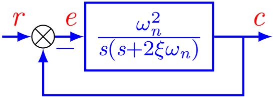
希望 $L(\omega)$ 以-20dB/sec 斜率穿越 0dB 线，并保持较宽的频段

3. $L(\omega)$ 高频段 $\leftrightarrow$ 通常 10 倍 ω_c 以上频段，系统抗高频噪声能力

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)} \xrightarrow{|G(s)|<<1} |\Phi(s)|\approx|G(s)|<<1$$

利用开环频率特性分析系统的性能

例 36 二阶系统



$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}\quad\begin{cases}K=\omega_n/2\xi\\ v=1\end{cases}$$

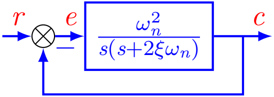
$$\begin{cases}|G(\mathrm{j}\omega)|=\dfrac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2+(2\xi\omega_n)^2}}\\ \angle G(\mathrm{j}\omega)=-90^\circ-\arctan\dfrac{\omega}{2\xi\omega_n}\end{cases}\qquad \Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$|G(\mathrm{j}\omega_c)|=\frac{\omega_n^2}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+(2\xi\omega_n)^2}}=1$$

$$\omega_c^2[\omega_c^2+4\xi^2\omega_n^2]-\omega_n^4=\omega_c^4+4\xi^2\omega_n^2\omega_c^2-\omega_n^4=0\quad \omega_c=\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}\cdot\omega_n$$

$$\gamma=180^\circ+\psi(\omega_c)=90^\circ-\arctan\frac{\omega_c}{2\xi\omega_n}=\arctan\frac{2\xi\omega_n}{\omega_c}$$

利用开环频率特性分析系统的性能



$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

$$\gamma = 180^\circ + \psi(\omega_c) = 90^\circ - \arctan\frac{\omega_c}{2\xi\omega_n} = \arctan\frac{2\xi\omega_n}{\omega_c}$$

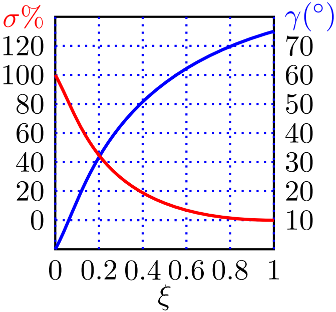
$$\omega_c = \sqrt{\sqrt{4\xi^4+1} - 2\xi^2} \cdot \omega_n$$

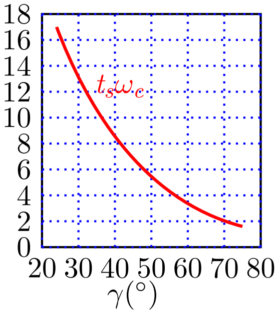
$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \arctan\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}} \\ \sigma\% &= e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned}\right\} \gamma \leftrightarrow \xi \leftrightarrow \sigma\%$$

利用开环频率特性分析系统的性能

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

$$t_s\omega_c = \frac{3}{\xi}\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2} = 6\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}}{2\xi} = \frac{6}{\tan\gamma}$$

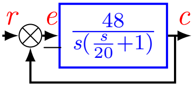


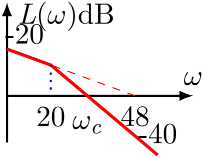


结论: 阻尼比 ξ 不变, 即相角裕度 γ 不变, 则阶跃响应的调整时间 t_s 将随 ω_c 的增大而减小。

利用开环频率特性分析系统的性能

例 37 已知系统结构图，求 ω_c，并确定 $\sigma\%$，t_s。





解：绘制 $L(\omega)$ 曲线

$$1 = \frac{48}{\omega_c \frac{\omega_c}{20}} \rightarrow$$

$$\omega_c = \sqrt{20 \times 48} = 31$$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{31}{20}$$

$$= 90^\circ - 57.2^\circ = 32.8^\circ$$

查 P343 图 5-48 有 $\sigma\% \xlongequal[\gamma=32.8^\circ]{\xi=0.29} 37\%$

$$t_s = \frac{6}{\omega_c \cdot \tan\gamma} = \frac{6}{31 \times \tan 32.8^\circ} = 0.3$$

按时域方法：

$$G(s) = \frac{48}{s(s/20+1)} = \frac{48 \times 20}{s(s+20)}$$

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{960}{s^2+20s+960}$$

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{960} = 31 \\ \xi = \frac{20}{2\times 31} = 0.3226 \end{cases}$$

$$\sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 35.3\%$$

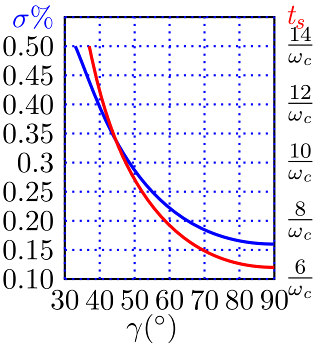
$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{10} = 0.3$$

利用开环频率特性分析系统的性能

高阶系统

$$\begin{cases} \sigma\% = \left[0.16 + 0.4\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right)\right] \times 100\% \\ t_s = \frac{\pi}{\omega_c}\left[2 + 1.5\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right) + 2.5\left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1\right)^2\right] \end{cases}$$

$$(35^\circ \le \gamma \le 90^\circ)$$

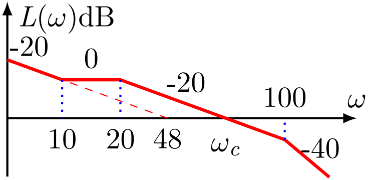


- 希望 $L(\omega)$ 以-20dB/dec 斜率穿越 0dB 线，并保持较宽的频段，以确保足够的相角裕度关于超调的要求;
- 保持所需相裕度，选择合适的截止频率可以影响调节时间.

利用开环频率特性分析系统的性能

例 38 已知单位反馈系统 $G(s)$，求 ω_c, γ；确定 $\sigma\%$, t_s。

$$G(s)=\frac{48(\frac{s}{10}+1)}{s(\frac{s}{20}+1)(\frac{s}{100}+1)}$$



解：绘制 $L(\omega)$ 曲线 $\frac{\omega_c}{48}=\frac{20}{10}$

$$\gamma=180^\circ+\psi(\omega_c)=180^\circ+\arctan\frac{96}{10}-90^\circ-\arctan\frac{96}{20}-\arctan\frac{96}{100}$$
$$=180^\circ+84^\circ-90^\circ-78^\circ-43.8^\circ=52.1^\circ$$

查 P343 图 5-48 $\begin{cases}\sigma\% \overset{\gamma=52.1^\circ}{=} 27\% \\ t_s=\frac{8}{\omega_c}=\frac{8}{96}=0.0714\end{cases}$

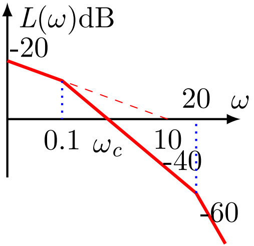
利用开环频率特性分析系统的性能

例 39 已知最小相角系统 $L(\omega)$ 如图所示，试确定

(1) 开环传递函数 $G(s)$;

(2) 由 γ 确定系统的稳定性；

(3) 将 $L(\omega)$ 右移 10 倍频，讨论对系统的影响。



解： (1) $G(s)=\frac{10}{s(\frac{s}{0.1}+1)(\frac{s}{20}+1)}$

(2)$\omega_c=\sqrt{0.1\times 10}=1$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{1}{0.1} - \arctan\frac{1}{20}$$
$$= 90^\circ - 84.3^\circ - 2.86^\circ = 2.8^\circ > 0 \text{稳定}$$

$L(\omega)$ 右移后 $\begin{cases}\gamma\text{不变} \to \sigma\%\text{不变}\\ \omega_c\text{增大} \to t_s\text{减小}\end{cases}$

(3) 将 $L(\omega)$ 右移 10 倍频后有 $G(s)=\frac{100}{s(\frac{s}{1}+1)(\frac{s}{200}+1)}$

$$\omega_c = \sqrt{1\times 100} = 10$$
$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan\frac{10}{1} - \arctan\frac{10}{200}$$
$$= 90^\circ - 84.3^\circ - 2.86^\circ$$
$$= 2.8^\circ$$

利用开环频率特性分析系统的性能

三频段理论

$L(\omega)$ 频段		对应性能	希望形状
低频段	开环增益K 系统型别v	稳态误差e_{ss}	陡，高
高频段	截止频率ω_c 相角裕度γ	动态性能 $\sigma\%$, t_s	缓，宽
高频段		系统抗高频干扰能力	低，陡

三频段理论并没有提供设计系统的具体步骤，但它给出了调整系统结构改善系统性能的原则和方向

利用开环频率特性分析系统的性能

关于三频段理论的说明：

1. 各频段分界线没有明确的划分标准；
2. 与无线电学科中的“低”、“中”、“高”频概念不同；
3. 不能用是否以-20dB/dec 过 0dB 线作为判定闭环系统是否稳定的标准；
4. 只适用于单位反馈的最小相角系统。

利用闭环频率特性分析系统的性能

研究闭环频率特性的必要性

(1) 闭环频率特性的一些特征量在实际工程中应用十分广泛;

(2) 通过实验方法很容易得到系统的闭环频率特性;

(3) 通过闭环频率特性可以估算系统的性能指标。

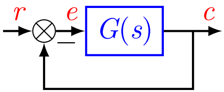
接下来...

1. 频率特性的基本概念
   - 频率特性 $G(j\omega)$ 的定义
   - 频率特性 $G(j\omega)$ 的图解表示
2. 对数频率特性（Bode 图）
   - 典型环节的 Bode 图
   - 开环系统对数频率特性（Bode)
3. 幅相频率特性（Nyquist 图）
   - 典型环节的幅相频率特性
   - 系统开环幅相曲线
4. 频域稳定判据
   - 幅角原理
   - 奈奎斯特稳定判据
   - 对数稳定判据
5. 稳定裕度
   - 稳定裕度的定义
   - 稳定裕度的计算

闭环频率特性曲线的绘制

用向量法求闭环频率特性

$$G(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$



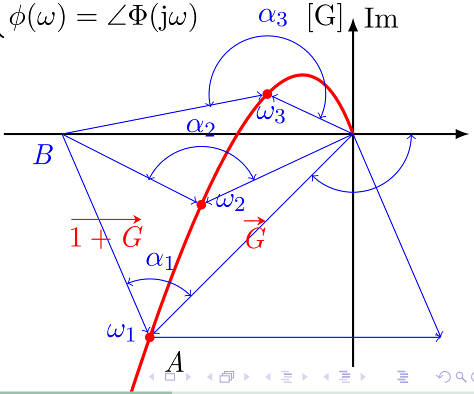
$$\Phi(\omega)=\frac{G(\mathrm{j}\omega)}{1+G(\mathrm{j}\omega)}=M(\omega)\cdot e^{\mathrm{j}\phi(\omega)}\quad\begin{cases}M(\omega)=|\Phi(\mathrm{j}\omega)|\\ \phi(\omega)=\angle\Phi(\mathrm{j}\omega)\end{cases}$$

$$G(\mathrm{j}\omega)=\overrightarrow{OA}$$

$$1+G(\mathrm{j}\omega)=\overrightarrow{BA}$$

$$\Phi(\mathrm{j}\omega)=\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{BA}}$$

$$\begin{cases}M(\omega)=|\overrightarrow{OA}|/|\overrightarrow{BA}|\\ \psi(\omega)=\angle\overrightarrow{OA}-\angle\overrightarrow{BA}=\alpha\end{cases}$$



闭环频率特性曲线的绘制

等 M 圆 等 N 圆图

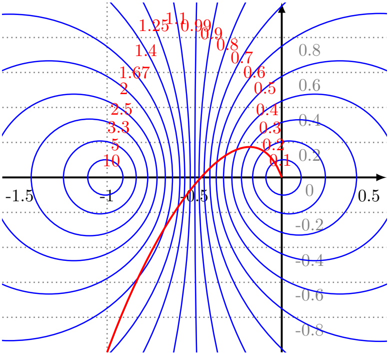
等 M 圆 $-\Phi(\omega) = \frac{OA}{BA}$ 为常数的轨迹

设 $G(\mathrm{j}\omega) = X + \mathrm{j}Y$

$$\Phi(\mathrm{j}\omega) = M(\omega)\angle\alpha(\omega)$$

$$|\Phi| = \left|\frac{G}{1+G}\right| = \left|\frac{X+\mathrm{j}Y}{1+X+\mathrm{j}Y}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\sqrt{(X+1)^2+Y^2}} = M(\omega)$$



整理得等 M 圆方程

$$\left(X - \frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2$$

闭环频率特性曲线的绘制

等 N 圆 $-\angle OAB = \alpha$ 为常数的轨迹

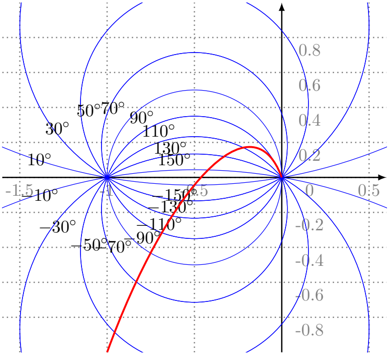
设 $G(\mathrm{j}\omega) = X + \mathrm{j}Y$

$$\Phi(\mathrm{j}\omega) = \frac{G}{1+G} = \frac{X+\mathrm{j}Y}{1+X+\mathrm{j}Y}$$

$$= \frac{X^2+X+Y^2+\mathrm{j}Y}{(X+1)^2+Y^2}$$

$$\angle\Phi(\omega) = \arctan\frac{Y}{X^2+X+Y^2} = \alpha$$

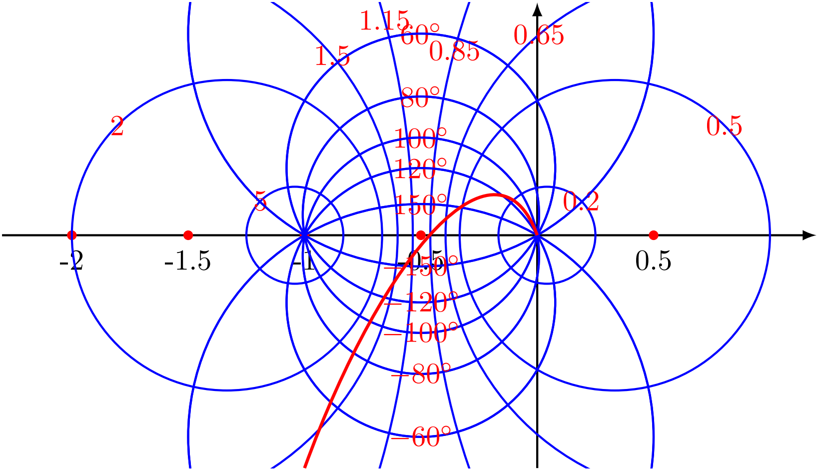
$$\tan\alpha = N(\omega) = \frac{Y}{X^2+X+Y^2}$$



整理得等 N 圆方程

$$\left(X+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y-\frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{N^2+1}{4N^2}$$

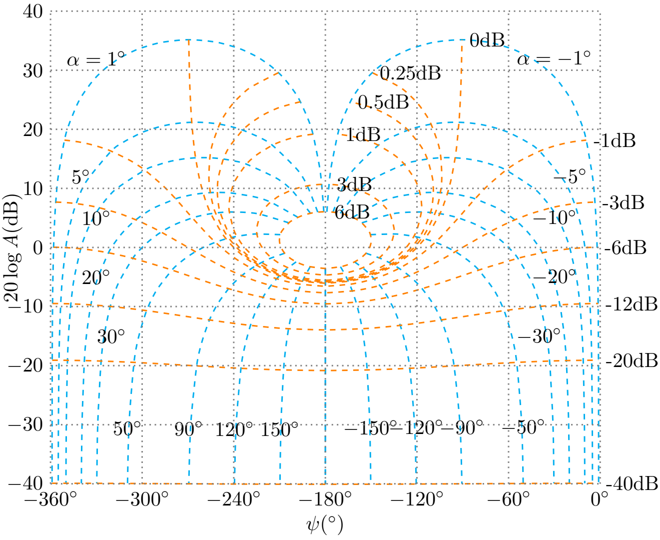
闭环频率特性曲线的绘制



等 M 圆和等 N 圆上的极坐标图

闭环频率特性曲线的绘制

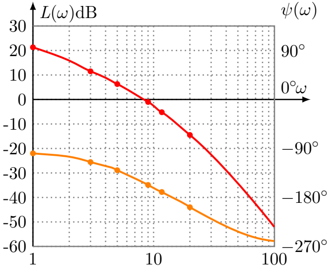
将等 M 圆和等 N 圆变换到对数幅相特性图上，得尼柯尔斯图.

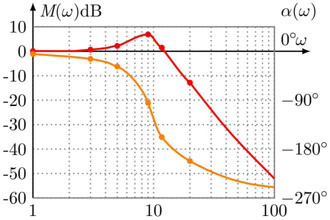


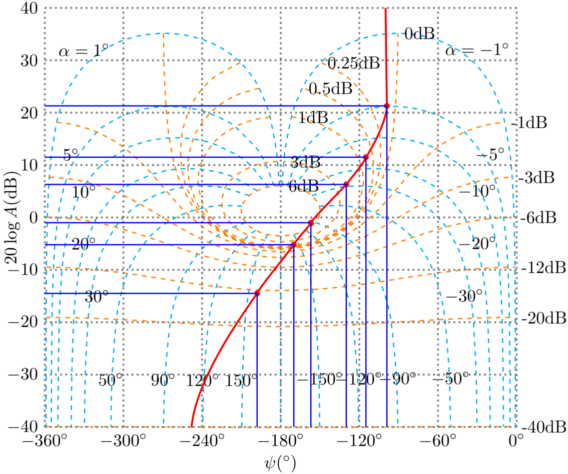
等 M 圆和等 N 圆上的 $Bode$ 图

例 40 已知 $G(s) = \dfrac{11.7}{s(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{20}+1)}$，求 $\Phi(j\omega)$

ω rad/s	1	3	5	9	11.7	20
$L(\omega)$ dB	21.3	11.5	6.3	-1	-5.2	-14.5
$\psi(\omega)$ (°)	$-99°$	$-115°$	$-130°$	$-157°$	$-170°$	$-198°$
$M(\omega)$ dB	0.1	0.67	2.2	6.9	1.5	-12.8
$\alpha(\omega)$ (°)	$-5°$	$-14°$	$-28°$	$-95°$	$-158°$	$-202°$
$M(\omega)$	1.01	1.08	1.29	2.21	1.19	0.23







接下来...

1. 频率特性的基本概念
   - 频率特性 $G(j\omega)$ 的定义
   - 频率特性 $G(j\omega)$ 的图解表示
2. 对数频率特性（Bode 图）
   - 典型环节的 Bode 图
   - 开环系统对数频率特性（Bode）
3. 幅相频率特性（Nyquist 图）
   - 典型环节的幅相频率特性
   - 系统开环幅相曲线
4. 频域稳定判据
   - 幅角原理
   - 奈奎斯特稳定判据
   - 对数稳定判据
5. 稳定裕度
   - 稳定裕度的定义
   - 稳定裕度的计算

闭环频率特性的几个特征量

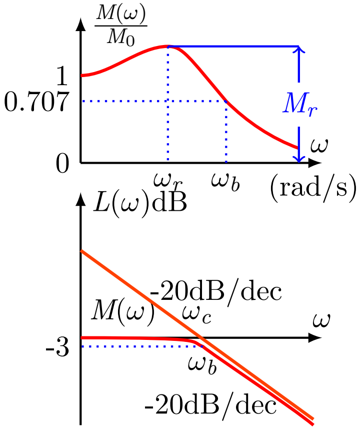
(1) 零频值 $M_0 = M(0)$

(2) $\begin{cases} \text{谐振频率}\,\omega_r \\ \text{谐振峰值}\,M_r \end{cases}$

对二阶欠阻尼系统

$$\begin{cases} \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases}$$

(3) 带宽频率 ω_b: $M(\omega)$ 下降到 0.707 倍的频率为 0 时的分贝值 M_0 对应的频率值 ω_b



例 一阶系统 $\begin{cases} G(s) = \frac{1}{Ts} & \omega_c = 1/T \\ \Phi(s) = \frac{1}{Ts+1} & \omega_b = 1/T \end{cases}$ $t_s = 3T = \frac{3}{\omega_c} = \frac{3}{\omega_b}$

闭环频域指标与时域指标的关系：二阶系统

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

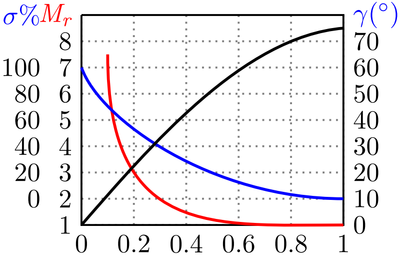
$$\begin{cases} \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases} \quad 0 \le \xi \le 0.707$$

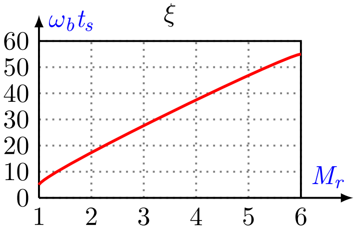
$$M(\omega_b) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega_b^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_b)^2}} = 0.707$$

$$\omega_b = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2+4\xi^2}}$$

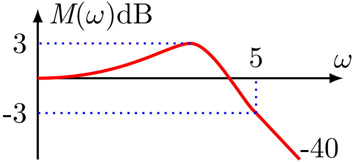
$$t_s = 3/\xi\omega_n$$

$$\omega_b t_s = \frac{3}{\xi}\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2+4\xi^2}}$$





闭环频域指标与时域指标的关系：二阶系统



例 41 实验测得某闭环系统的对数幅频特性如图所示，试确定系统的动态性能 $(\sigma\%, t_s)$。

解：依图，可以确定是欠阻尼二阶系统

$20\lg M_r = 3\text{dB}$

$$\begin{cases} M_r = 10^{\frac{3}{20}} = 1.4125 & \xrightarrow{\text{P342 图 5-46}} & \sigma\% = 25\% \\ \omega_b = 5 & \xrightarrow{\text{前页图}} & t_s \cdot \omega_b \overset{M_r=1.4}{=} 9 \quad t_s = 9/5 = 1.8 \end{cases}$$

或由 $$\begin{cases} M_r = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \\ \omega_b = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^2}} \end{cases}$$

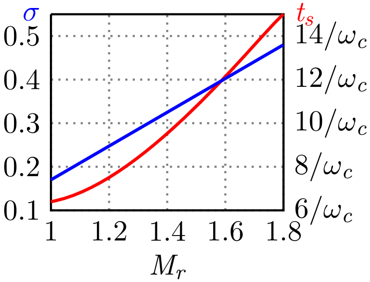
解出 ξ，ω_n，可确定 $\sigma\%$，t_s

闭环频域指标与时域指标的关系：高阶系统

$$\sigma\% = [0.16 + 0.4(M_r - 1)] \times 100\%$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c}[2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2]$$

$$(1 \le M_r \le 1.8)$$

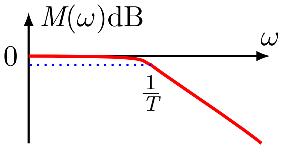


用频域分析方法估算系统的动态性能

例 42 一台笔录仪的传递函数为 $\Phi(s)=\frac{1}{Ts+1}$ ，要求在 $5Hz$ 以内时，记录仪的振幅误差不大于被测信号的 10% ，试确定记录仪应有的带宽 $\omega_b=?$

解：依题意，当 $\omega=5\times2\pi=10\pi\ (\mathrm{rad/s})$ 时，要求

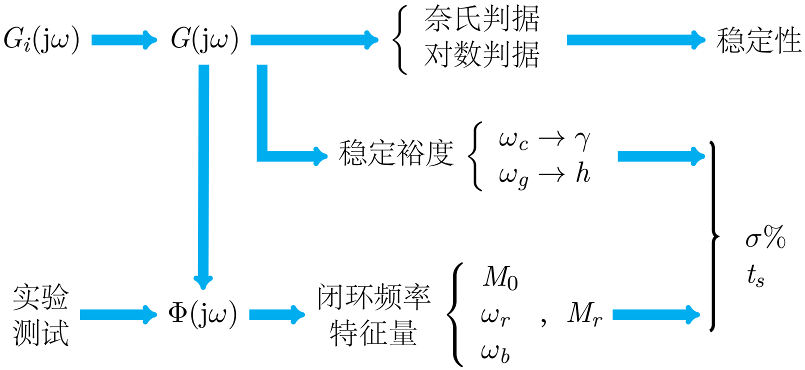
$$\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}T\omega}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\geq0.9$$



即 $T^2\omega^2+1\leq\frac{1}{0.9^2}$

$$T\leq\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{1}{0.9^2}-1}\Bigg|_{\omega=10\pi}=0.0154\quad\omega_b=\frac{1}{T}\geq\frac{1}{0.0154}=64.833(\mathrm{rad/s})$$

课程小结


$G_i(\mathrm{j}\omega)$
$G(\mathrm{j}\omega)$
奈氏判据
对数判据
稳定性
稳定裕度
$\omega_c \to \gamma$
$\omega_g \to h$
实验
测试
$\Phi(\mathrm{j}\omega)$
闭环频率
特征量
M_0
ω_r
ω_b
, M_r
$\sigma\%$
t_s