自动控制原理

第四章 根轨迹法

电子信息学院

主讲：张永韡 博士 讲师
email: ywzhang@just.edu.cn

主要内容

1. 根轨迹法的基本概念
   - 根轨迹
   - 根轨迹的条件
2. 绘制根轨迹的基本法则
   - 基本法则
   - 其他有用结论
3. 广义根轨迹
   - 零度根轨迹
   - 参数根轨迹
4. 利用根轨迹分析系统性能
   - 开环极点对根轨迹的影响
   - 开环零点对根轨迹的影响

主要内容

1. 根轨迹法的基本概念
2. 绘制根轨迹的基本法则
3. 广义根轨迹
4. 利用根轨迹分析系统性能

根轨迹法的特点

根轨迹法: 三大分析校正方法之一

特点：

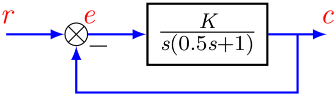
1. 图解方法，直观、形象。
2. 适用于研究当系统中某一参数变化时，系统性能的变化趋势。
3. 近似方法，不十分精确。

根轨迹： 系统某一参数由 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时，系统闭环特征根 λ 在 s 平面相应变化所描绘出来的轨迹

接下来...

根轨迹

例 1 系统结构图如图所示，分析闭环极点 λ 随开环增益 K 变化的趋势。



$$G(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)}=\frac{K^*=2K}{s(s+2)}$$

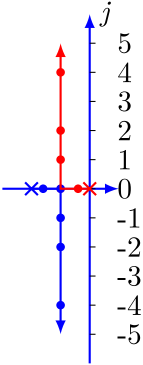
$$\begin{cases} K\text{：开环增益} \\ K^*\text{：根轨迹增益} \end{cases}$$

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K^*}{s^2+2s+K^*}$$

$$D(s)=s^2+2s+K^*=0$$

$$\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-K^*}$$

$K^*=2K$	λ_1	λ_2
0	0	-2
0.64	-0.4	-1.6
1	-1	-1
2	-1+j1	-1-j1
5	-1+j2	-1-j2
17	-1+j4	-1-j4
⋮	⋮	⋮
∞	-1+j∞	-1-j∞



接下来...

根轨迹的条件

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=-1\rightarrow \text{根轨迹方程}$$

$$|G(s)H(s)|=\frac{K^*|s-z_1|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s-p_j|}=1\rightarrow \text{模值条件}$$

$$\angle G(s)H(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=(2k+1)\pi\rightarrow \text{相角条件}$$

根轨迹的条件

注意：

- 相角条件是 s 点位于根轨迹上的充要条件，绘制根轨迹就是找出 s 平面上所有满足相角条件的点。
- 根轨迹上某点对应的 K^* 值，应由模值条件来确定。

接下来...

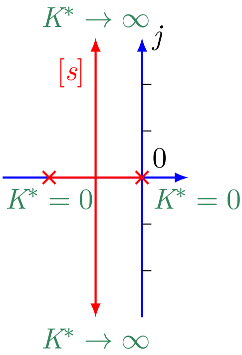
绘制根轨迹的基本法则

法则 1 根轨迹的起点和终点

根轨迹起始于开环极点（×），终止于开环零点（○）；如果开环零点个数 m 少于开环极点个数 n，则有 $n-m$ 条根轨迹终止于无穷远处。

例 2

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+2)}$$



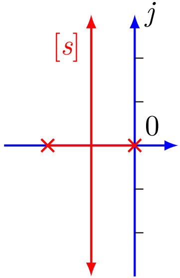
绘制根轨迹的基本法则

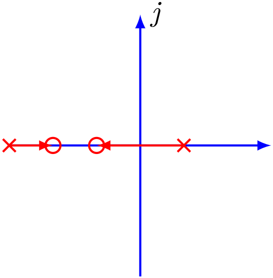
法则 2 根轨迹的分支数，对称性和连续性

根轨迹的分支数 $=$ 开环极点数 n; 根轨迹连续且对称于实轴。

法则 3 实轴上的根轨迹

其右侧开环实零点与实极点数目之和为奇数的区域必是根轨迹。





绘制根轨迹的基本法则

法则 4 渐近线

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

$$\psi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$n > m$ 时，$n-m$ 条根轨迹分支趋于无穷远处的规律。

绘制根轨迹的基本法则

例 3 系统开环传递函数为

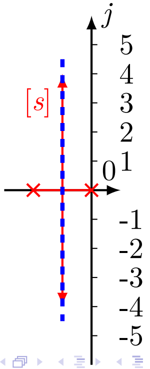
$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+2)}$$

试绘制根轨迹。

解：1，实轴上的根轨迹：[-2,0]；2，渐近线：

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}=\frac{-2+0}{2-0}=-1$$

$$\psi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\pm 90^\circ$$



绘制根轨迹的基本法则

例 4 单位反馈系统的开环传递函数为

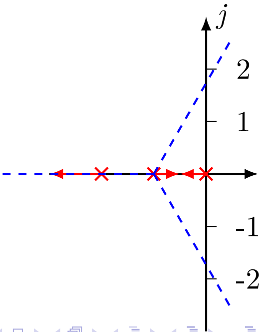
$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

试绘制根轨迹。

解：1，实轴上的根轨迹：$[-\infty, -2]$，$[-1, 0]$；2，渐近线：

$$\sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

$$\psi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ,\ 180^\circ$$



绘制根轨迹的基本法则

法则 5

分离点d $$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{d-p_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d-z_i}$$ 对应重根

分离角θ $$\theta=\frac{2\pi}{q}$$

分离角 θ：分离点处相邻分支的切线夹角。q：分支数

1. 无零点时右端为 0；
2. 法则 5 是必要条件，只有满足分离点方程又属于根轨迹的点才是分离点；
3. 实轴上，相邻两个开环极点（或相邻开环零点）之间的根轨迹上必有分离点；相邻开环零点和极点之间可能有分离点。
4. 根轨迹可能有不止一个分离点；分离点不一定在实轴上。

绘制根轨迹的基本法则

例 5 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$ 试绘制根轨迹。

解：

1. 实轴上的根轨迹：$[-\infty,-2]$，$[-1,0]$
2. 渐近线：

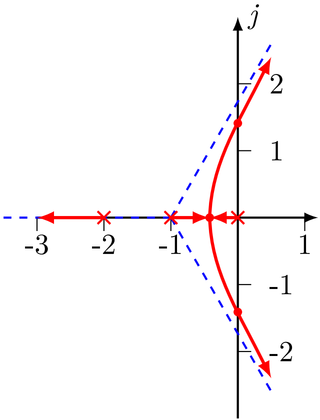
$$\sigma_a=\frac{0-1-2}{3}=-1$$

$$\psi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\pm 60^\circ,\ 180^\circ$$

3. 分离点：$\frac{1}{d-0}+\frac{1}{d-(-1)}+\frac{1}{d-(-2)}=0$。整理得：$3d^2+6d+2=0$，解得：

$$\begin{cases} d_1=-0.423 & \checkmark \\ d_2=-1.577 & \times \end{cases}$$

4. 与虚轴交点？



绘制根轨迹的基本法则

法则 6 与虚轴交点

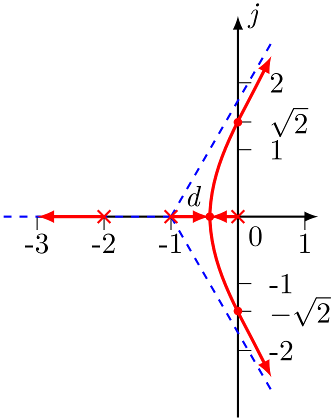
1. 系统临界稳定点
2. $s = j\omega$ 是根的点

[接例 5]，**解**：

$$D(s) = s(s+1)(s+2)+K^* = s^3+2s^2+2s+K^* = 0$$

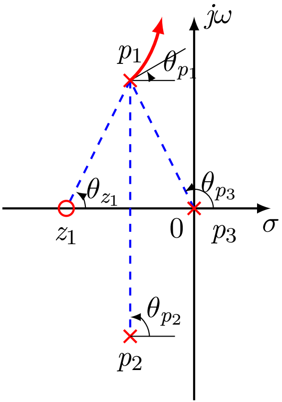
令 $s = j\omega$，$D(j\omega) = -j\omega^3 - 2\omega^2 + 2j\omega + K^* = 0$

$$\begin{cases} \mathrm{Re[D(j\omega)]} = -2\omega^2 + \mathrm{K}^* = 0 \\ \mathrm{Im[D(j\omega)]} = -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K^* = 6 \end{cases}$$



法则 7：起始角和终止角

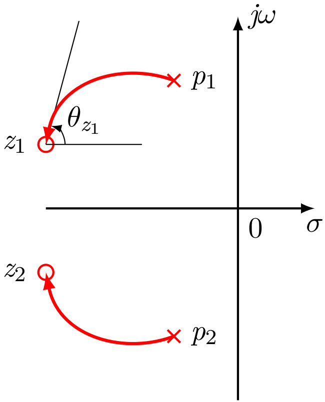
起始角：始于开环极点的根轨迹，在起点处的切线与水平线的正方向夹角 θ_{p1}



$$\theta_{p_k} = 180^\circ + \sum_{i=1}^{m} \angle(p_k - z_i) - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \angle(p_k - p_j)$$

法则 7：起始角和终止角

终止角：止于开环零点的根轨迹，在终点处的切线与水平线的正方向夹角 θ_{z_1}



$$\theta_{z_k} = 180^\circ + \sum_{j=1}^{n} \angle(z_k - p_j) - \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \angle(z_k - z_i)$$

接下来...

1. 根轨迹法的基本概念
   - 根轨迹
   - 根轨迹的条件
2. 绘制根轨迹的基本法则
   - 基本法则
   - 其他有用结论
3. 广义根轨迹
   - 零度根轨迹
   - 参数根轨迹
4. 利用根轨迹分析系统性能
   - 开环极点对根轨迹的影响
   - 开环零点对根轨迹的影响

其他有用结论：根轨迹任一点对应增益

例 6 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

绘制根轨迹

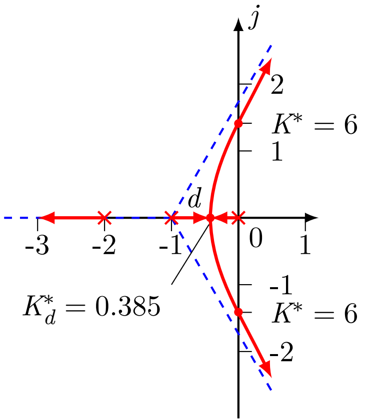
解： 模值条件

$$|G(s)H(s)| = \frac{K^* \prod_{i=1}^{m} |s - z_i|}{\prod_{j=1}^{m} |s - p_j|}$$

$$K^* = \frac{\prod_{j=1}^{n} |s - p_j|}{\prod_{i=1}^{m} |s - z_i|}$$

$$K^* = |s-0||s-(-1)||s-(-2)| \overset{s=j\sqrt{2}}{=} 6$$

$$K_d^* = |d-0||d-(-1)||d-(-2)| \overset{d=-0.423}{=} 0.385$$



其他有用结论：

开环极点与闭环极点关系

$$\text{根之和：}\quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}P_i=C\quad(n-m\leq 2)$$

$n-m\leq 2$ 时，闭环根之和保持一个常值。

$n-m\leq 2$ 时，一部分根左移，另一部分根必右移，且移动总量为零。

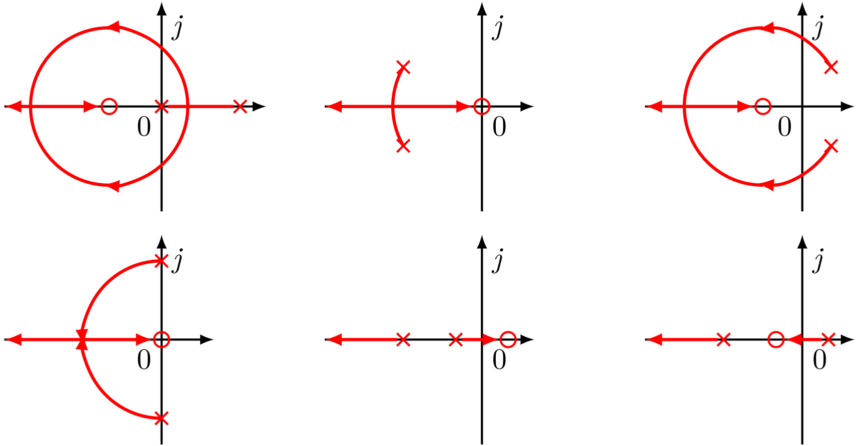
闭环极点（根）与特征方程系数关系

$$D(s)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n=(s-s_1)\cdots(s-s_n)=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}s_j=-a_1,\quad \prod_{j=1}^{n}s_j=(-1)^n a_n$$

其他有用结论：

定理：若系统有 2 个开环极点，1 个开环零点，且在复平面存在根轨迹，则复平面的根轨迹一定是以该零点为圆心的圆弧。



课程回顾

根轨迹

系统某一参数由 $0 \to +\infty$ 变化时，系统闭环特征根 l 在 s 平面相应变化所描绘出来的轨迹。

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = -1 \to \text{相角条件}$$

根轨迹条件

$$|G(s)H(s)| = \frac{K^*|s-z_1|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|} = \frac{K^*\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s-p_j|} = 1 \to \text{模值条件}$$

$$\angle G(s)H(s) = \sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i) - \sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j) = (2k+1)\pi \to \text{相角条件}$$

课程回顾

绘制根轨迹的基本法则

法则 1 根轨迹的起点和终点

法则 2 根轨迹的分支数，对称性和连续性

法则 3 实轴上的根轨迹

法则 4 渐近线 $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}, \psi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

法则 5 分离点 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{d-z_j}$

法则 6 与虚轴交点 $\mathrm{Re}[\mathrm{D}(\mathrm{j}\omega)] = \mathrm{Im}[\mathrm{D}(\mathrm{j}\omega)] = 0$

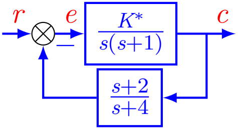
法则 7 出射角/入射角

$$\theta_{p_k} = 180^\circ + \sum_{i=1}^{m} \angle(p_k - z_i) - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \angle(p_k - p_j)$$
$$\theta_{z_k} = 180^\circ + \sum_{j=1}^{n} \angle(z_k - p_j) - \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \angle(z_k - z_i)$$

法则 8 根之和 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} P_i = C \ \ (n-m \geq 2)$

例 7

系统结构图如图所示



1. 绘制当 $K^* = 0 \to +\infty$ 时系统的根轨迹；
2. 当 $\mathrm{Re}[\lambda_1] = -1$ 时，$\lambda_3 = ?$

解：1， $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$

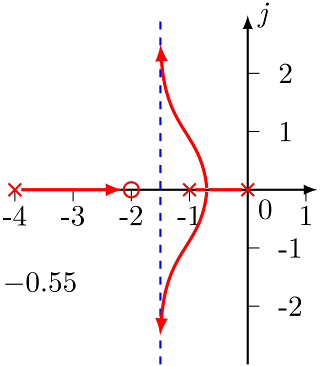
(1) 实轴上的根轨迹: [-4,-2], [-1,0]

(2) 渐近线: $\begin{cases} \sigma_a = \frac{(0-1-4)-(-2)}{3-1} = -\frac{3}{2} \\ \psi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90^\circ \end{cases}$

(3) 分离点:

$$\frac{1}{d-0} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+4} = \frac{1}{d+2} \to d = -0.55$$

$$K_d = \frac{|d||d+4||d+4|}{|d+2|} = 0.589$$



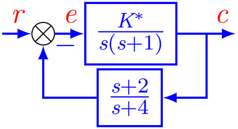
例 7

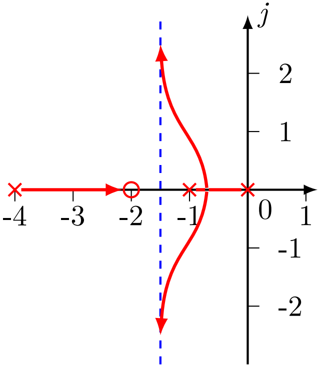
系统结构图如图所示

1. 绘制当 $K^* = 0 \to +\infty$ 时系统的根轨迹；
2. 当 $\mathrm{Re}[\lambda_1] = -1$ 时，$\lambda_3 = ?$

解：2，由根之和法则

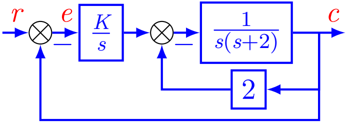
$$\begin{aligned} 0-1-4 = -5 &= \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ &= 2(-1)+\lambda_3 \\ \lambda_3 = -5+2 &= -3 \end{aligned}$$





例 8

已知系统结构图，绘制根轨迹。



解：1， $G(s) = \frac{K}{s}\frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1+\frac{2}{s(s+2)}} = \frac{K}{s(s^2+2s+2)}$

(1) 实轴上的根轨迹: $[-\infty, 0]$

(2) 渐近线: $\begin{cases} \sigma_a = \frac{(0-1-1)}{3} = -\frac{2}{3} \\ \psi_a = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ \end{cases}$

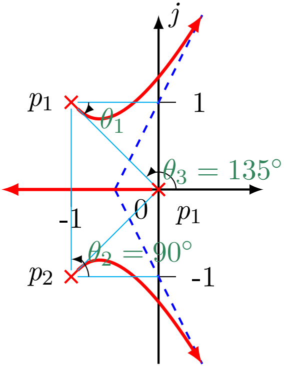
(3) 出射角:

$$\theta_1 = 0-(90^\circ+135^\circ)+180^\circ \rightarrow \theta_1 = -45^\circ$$

(4) 与虚轴交点:

$$D(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + K = 0$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[D(j\omega)] = -2\omega^2 + K = 0 & \omega = \pm\sqrt{2} \\ \mathrm{Im}[D(j\omega)] = -\omega^3 + 2\omega = 0 & K = 4 \end{cases}$$



绘制根轨迹的基本法则

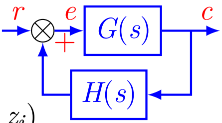
注意

1. 用以上法则，只能概略地绘出根轨迹来；
2. 并非每一题全部法则都要用；
3. 实轴、虚轴相同的刻度；
4. “×”、“○”；
5. 加粗线及箭头；
6. 关键点的标注；
7. 开环零极点的位置有时略有变化，根轨迹可能有显著的不同，要依据情况具体分析而确定。

接下来...

广义根轨迹

零度根轨迹—系统实质上处于正反馈时的根轨迹



$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$$

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=+1\rightarrow \text{根轨迹方程}$$

$$|G(s)H(s)|=\frac{K^*|s-z_1|\cdots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2|\cdots|s-p_n|}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s-p_j|}=1\rightarrow \text{模值条件}$$

$$\angle G(s)H(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=2k\pi\rightarrow \text{相角条件}$$

绘制零度根轨迹的基本法则

法则 1 根轨迹的起点和终点

法则 2 根轨迹的分支数，对称性和连续性

★ 法则 3 实轴上的根轨迹

★ 法则 4 渐近线

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_i}{n-m}, \psi_a = \frac{2k\pi}{n-m}$$

法则 5 分离点 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{d-z_j}$

法则 6 与虚轴交点 $\mathrm{Re}[\mathrm{D}(\mathrm{j}\omega)] = \mathrm{Im}[\mathrm{D}(\mathrm{j}\omega)] = 0$

★ 法则 7 出射角/入射角

$\theta_{p_k} = \sum_{i=1}^{m} \angle(p_k - z_i) - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \angle(p_k - p_j)$

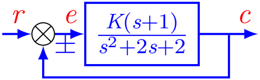
$\theta_{z_k} = \sum_{j=1}^{n} \angle(z_k - p_j) - \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \angle(z_k - z_i)$

法则 8 根之和 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = C \ \ (n-m \geq 2)$

零度根轨迹

例 9 系统结构图如图所示，

$K=0\to+\infty$ 变化。试分别绘制 0°、180° 根轨迹。



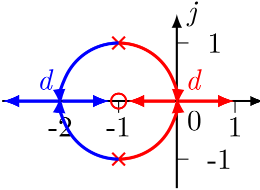
解： $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2+2s+2}=\dfrac{K(s+1)}{(s+1+j)(s+1-j)}$, $\begin{cases}K_k=K/2\\ v=0\end{cases}$

A, 180° 根轨迹　　　　B, 0° 根轨迹

(1) 实轴轨迹: $[-\infty,-1]$　　　　$[-1,\infty]$

(2) 出射角: $\theta_1=90^\circ-90^\circ+180^\circ$　　$90^\circ-90^\circ+0^\circ$

$\to\theta_1=180^\circ$　　　　$\to\theta=0$



(3) 分离点: $\dfrac{1}{d+1+j}+\dfrac{1}{d+1-j}=\dfrac{2(d+1)}{d^2+2d+2}=\dfrac{1}{d+1}$

整理得: $d^2+2d=d(d+2)=0$

解根:

$$\begin{cases}d_1=-2\\ K_{d_1}=\dfrac{|d+1+||d+1-j|}{|d+1|}\overset{d=-2}{=}2\end{cases}\qquad\begin{cases}d_2=0\\ K_{d_2}=\dfrac{|d+1+||d+1-j|}{|d+1|}\overset{d=0}{=}2\end{cases}$$

零度根轨迹

例 10 系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K^*(s+1)}{(s+3)^3}$$

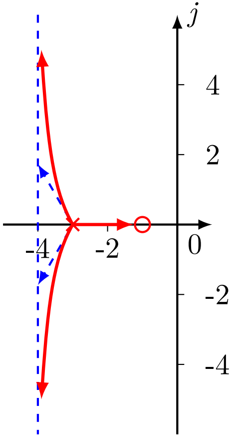
分别绘制 $0°$、$180°$ 根轨迹。

解： 1，绘制 $180°$ 根轨迹

(1) 实轴轨迹：$[-3, -1]$

(2) 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a = \frac{-3\times3+1}{2} = -4 \\ \psi = \frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm 90° \end{cases}$

(3) 出射角：有重实极点 (或零点) 时，该点处相邻分支切线夹角 $\theta = \frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{3}$



零度根轨迹

2，绘制 0° 根轨迹

(1) 实轴轨迹：$[-\infty,-3]$，$[-1,+\infty]$

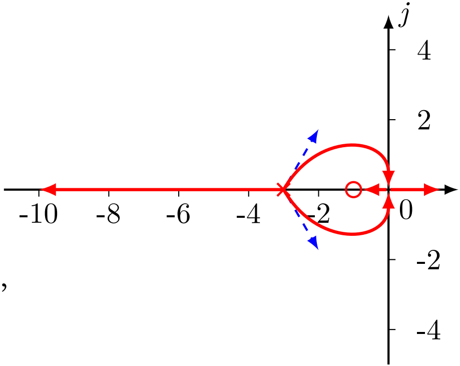
(2) 渐近线：$\begin{cases}\sigma_a=\frac{-3\times3+1}{2}=-4\\ \psi=\frac{2k\pi}{2}=0^\circ,180^\circ\end{cases}$

(3) 分离点：$\frac{3}{d+3}=\frac{1}{d+1}$

整理得：$3d+3=d+3\rightarrow d=0$

$$K_d^*=\frac{|d+3|^3}{|d+1|}\overset{d=0}{=\!=}27$$

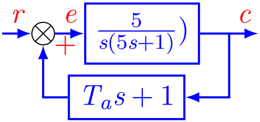
(4) 出射角：有重实极点 (或零点) 时，该点处相邻分支切线夹角 $\theta=\frac{2\pi}{3}$



接下来...

参数根轨迹—除 K^* 之外其他参数变化时系统的根轨

例 11 绘制图示系统当参数 T_a 从零变化到无穷大时的根轨迹。



解： 1,

$$G(s)H(s) = \frac{5(T_a s + 1)}{s(5s+1)}$$

$$D(s) = s(5s+1) + 5(T_a s + 1) = 0$$

将不含 T_a 的项组合在一起，并将上面的式子除以这些项得到

$$1 + \frac{5T_a s}{5s^2 + s + 5} = 0 \text{ 即 } \frac{T_a s}{s^2 + 0.2s + 1} = -1$$

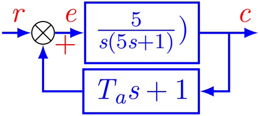
由于这一表达式的形式与根轨迹方程的形式相同，从而得到一个等效的开环传递函数

$$G_e(s)H_e(s) = \frac{T_a s}{s^2 + 0.2s + 1}$$

等效的根轨迹增益为 $K_e^* = T_a$。

参数根轨迹—除 K^* 之外其他参数变化时系统的根轨

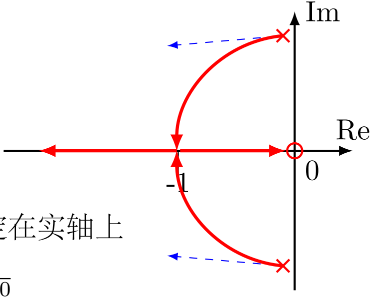
例 12 绘制图示系统当参数 T_a 从零变化到无穷大时的根轨迹。



解： 1，

$$G_e(s)H_e(s) = \frac{T_a s}{s^2 + 0.2s + 1}, \quad K_e^* = T_a$$

$$p_{1,2} = -0.1 \pm j0.99, \quad z_1 = 0$$



(1) 实轴轨迹：$[-\infty, 0]$

(2) 渐近线：1 条，$\psi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pi$，肯定在实轴上

(3) 分离点：$\frac{1}{d+0.1+j0.99} + \frac{1}{d+0.1-j0.99} = \frac{1}{d-0}$

解得：$d = -1$，$d = 1$（舍去）

(4) 出射角：$\theta_1 = 95.7^\circ - 90^\circ + 180^\circ = 185.7^\circ$

广义根轨迹

例 13 例单位反馈系统开环传递函数 $G(s)=\frac{(s+a)/4}{s^2(s+1)}$，$a=0\rightarrow\infty$ 变化，绘制根轨迹。

解： $D(s)=s^3+s^2+\frac{1}{4}s+\frac{1}{4}a=0\rightarrow 1+\frac{a/4}{s^3+s^2+\frac{1}{4}s}=0$ 构造“等效开环传递函数” $G^*(s)=\frac{a/4}{s^3+s^2+s/4}=\frac{a/4}{s(s+0.5)^2}$

(1) 实轴轨迹：$[-\infty,0]$

(2) 渐近线：$\psi_a=-1/3$，$\psi_a=\pm 60^\circ$，180°

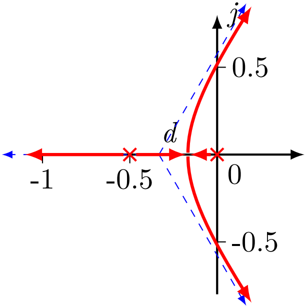
(3) 分离点：$\frac{1}{d}+\frac{2}{d+0.5}=0$

整理得：$3d+0.5=0\rightarrow d=-1/6$ $K^*=\frac{a_d}{4}=|d||d+0.5|^2=1/54\rightarrow a_d=2/27$

(4) 与虚轴交点：

$$D(s)=s^3+s^2+s/4+a/4=0$$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-\omega^2+a/4=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+\omega/4=0\end{cases}\quad\begin{cases}\omega=1/2\\ a=1\end{cases}$$



课程小结：广义根轨迹

零度根轨迹

注意与绘制 180° 根轨迹不同的 3 条法则

参数根轨迹

构造等效开环传递函数

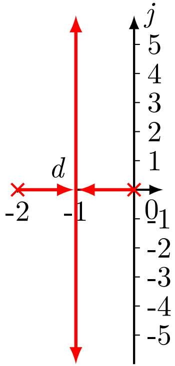
利用根轨迹分析系统性能

例 14

$$D(s) = s^2 + 2s + K^* = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K^*}$$

$$K^* = 2K = 0 \xrightarrow{\qquad} 1 \xrightarrow{\qquad} \infty$$



动态性能

- $0 \to 1$: $\xi > 1$, $\sigma\% = 0$, $T_s \downarrow$
- $1 \to \infty$: $0 < \xi < 1$, $\beta \uparrow \Rightarrow \xi \downarrow \Rightarrow \sigma\% \uparrow$, $t_s = \dfrac{3.5}{\xi\omega_n}$

稳定性

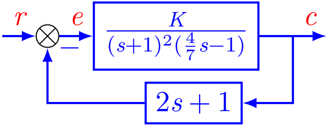
$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] < 0$，系统绝对稳定

稳态误差 $[r(t) = At]$

$$K^* \uparrow \Rightarrow e_{ss} = \frac{A}{K} = \frac{2A}{K^*} \downarrow$$

利用根轨迹分析系统性能

例 15 系统结构图如图所示



1. 绘制当 $K^* = 0 \to +\infty$ 时系统的根轨迹；
2. 分析系统稳定性随 K^* 变化的规律。

解：1， $G(s) = \dfrac{K(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)} = \dfrac{3.5K(s+1/2)}{(s+1)^2(s-\frac{7}{4})}$

$$\begin{cases} K^* = 3.5K \\ v = 0 \end{cases}$$

(1) 实轴上的根轨迹：[-0.5,1.75]

(2) 渐近线：$\begin{cases} \sigma_a = \dfrac{-2+7/4+1/2}{3-1} = \dfrac{1}{8} \\ \psi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{3-1} = \pm 90^\circ \end{cases}$

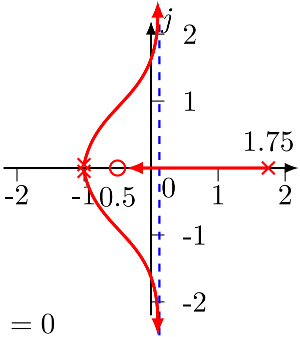
(3) 出射角：$\theta = \pm\dfrac{2\pi}{q}$

(4) 与虚轴交点：

$$D(s) = 4s^3 + s^2 + (14K-10)s + 7(K-1) = 0$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[D(j\omega)] = -\omega^2 + 7(K-1) = 0 \\ \mathrm{Im}[D(j\omega)] = -4\omega^3 + (14K-10)\omega = 0 \end{cases}$$

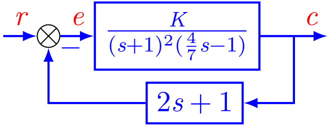
$\begin{cases} \omega = 0 \\ K = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K = 9/7 \end{cases}$



利用根轨迹分析系统性能

例 15 系统结构图如图所示

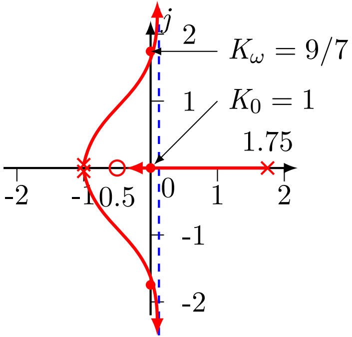
1. 绘制当 $K^* = 0 \to +\infty$ 时系统的根轨迹；
2. 分析系统稳定性随 K^* 变化的规律。



解：2，

$$K=0 \underbrace{\longrightarrow}_{\text{不稳定}} K_0=1 \underbrace{\longrightarrow}_{\text{稳定}} K_\omega=\frac{9}{7} \underbrace{\longrightarrow}_{\text{不稳定}} \infty$$

条件稳定



利用根轨迹分析系统性能

例 16 单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K^*}{s(s+20)(s^2+4s+20)}$，绘制根轨迹，判断系统稳定的开环增益范围。

解：1，$G(s)=\frac{K^*}{s(s+20)(s+2\pm 4)}$，$K=K^*/400$

(1) 实轴上的根轨迹：[-20,0]

(2) 渐近线：$\sigma_a=\frac{0-20-2-2}{4}=-6$，$\psi_a=\frac{(2k+1)\pi}{4}=\pm45°,\pm135°$

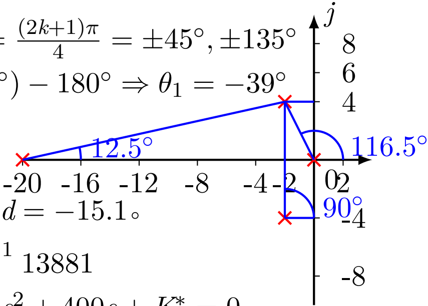
(3) 出射角：$\theta_1=-(90°+116.5°+12.5°)-180° \Rightarrow \theta_1=-39°$

(4) 分离点：

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+20}+\frac{1}{d+2+j4}+\frac{1}{d+2-j4}=0$$

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+20}+\frac{2(d=2)}{(d+2)^2+4^2}=0$$，试根得：$d=-15.1$。

$$K_d^*=|d||d+20||(d+2)^2+4^2| \overset{d=-15.1}{=} 13881$$



(5) 与虚轴交点：$D(s)=s^4+24s^3+100s^2+400s+K^*=0$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=\omega^4-100\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-24\omega^3+400\omega=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\omega=\sqrt{400/24}=4.1\\ K^*=1389\end{cases}$$

利用根轨迹分析系统性能

例 16 [续] $G(s) = \dfrac{K^*}{s(s+20)(s+2\pm j4)}$

(1) 实轴上的根轨迹：[-20,0]

(2) 渐近线：

$\sigma_a = -6$

$\psi_a = \pm 45°, \pm 135°$

(3) 出射角：$\theta_1 = -90°$

(4) 分离点：

$d = -15.1$

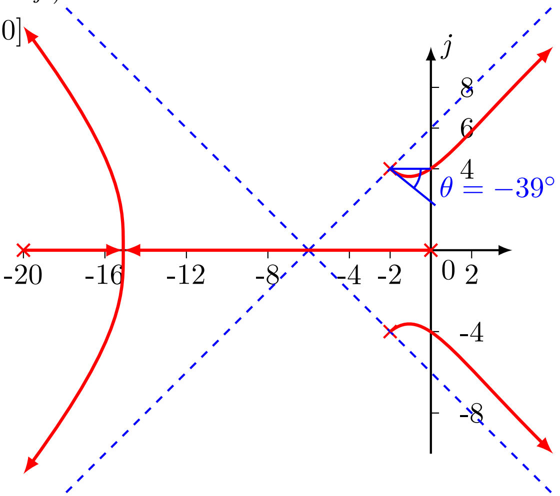
$K_d^* = 13881$

(5) 与虚轴交点：

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{400/24} = 4.1 \\ K^* = 1389 \end{cases}$$

稳定的开环增益范围：

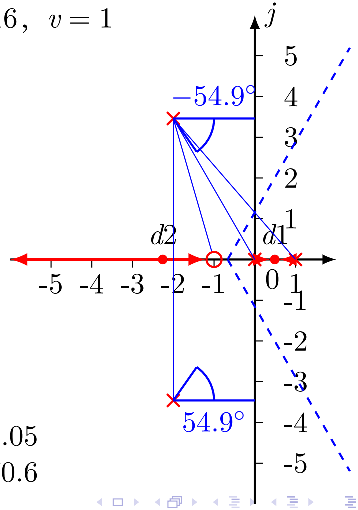
$0 < K < 3.4725$



利用根轨迹分析系统性能

例 17 已知 $G(s)=\frac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$，绘根轨迹；求稳定的 K 范围。

解：$G(s)=\frac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s+2\pm j2\sqrt{3})}$， $K=K^*/16$， $v=1$



(1) 实轴上的根轨迹：$(-\infty,-1]$，$[0,1]$

(2) 渐近线：

$$\sigma_a=(1-4+1)/3=-2/3$$

$$\psi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\pm60°,180°$$

(3) 出射角：$\theta_1=106.1°-(90°+120°$
$+130.9°)+180°\Rightarrow\theta_1=-54.9°$

(4) 分离点：

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d-1}+\frac{2(d+2)}{d^2+4d+16}=\frac{1}{d+1}$$

$d_1=0.49$， $d_2=-2.26$

$$K^*_{d_{1,2}}=\frac{|d||d-1||d^2+4d+16|}{|d+1|}\overset{\substack{d=0.49\\d=-2.26}}{=}\begin{cases}3.05\\70.6\end{cases}$$

利用根轨迹分析系统性能

例 17 [续] $G(s)=\frac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s+4s+16)}$， $K=K^*/16$， $v=1$

(5) 与虚轴交点：

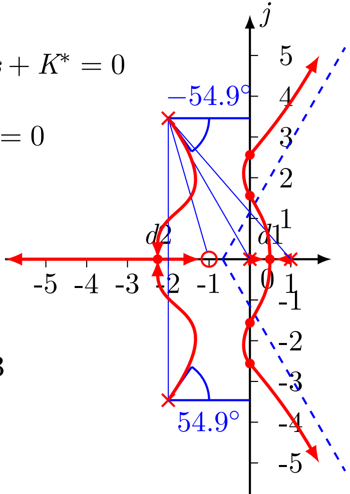
$$D(s)=s^4+3s^3+12s^2+(K^*-16)s+K^*=0$$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=\omega^4-12\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-3\omega^3+(K^*-16)\omega=0\end{cases}$$

$$K^*=3\omega^2+16$$

$$\omega^4-9\omega^2+16=0$$

$$\begin{cases}\omega_1=0\\ \omega_2=2.56\end{cases}\qquad\begin{cases}K_1^*=19.7\\ K_2^*=35.7\end{cases}$$



稳定的 K^* 范围： $19.7<K^*<35.7$

稳定的 K 范围： $1.234<K<\frac{K^*}{16}<2.23$

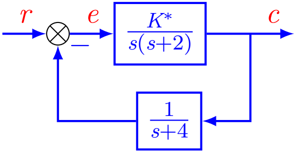
利用根轨迹分析系统性能

例 18 已知系统结构图，$K^* = 0 \to \infty$，绘制系统根轨迹并确定：

(A) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围；

(B) 复极点对应 $\xi = 0.5(\beta = 60^\circ)$ 时 K 的值及闭环极点位置；

(C) 当 $\lambda_3 = -5$ 时，$\lambda_{1,2} = ?$ 相应 $K = ?$



利用根轨迹分析系统性能

例 18 [续] 解：绘制系统根轨迹 $G(s)=\frac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$

$K=K^*/8,\ \ v=1$

(1) 实轴上的根轨迹：$(-\infty,-4]$，$[-2,0]$

(2) 渐近线：$\sigma_a=(-2-4)/3=-2$

$\psi_a=\pm 60^\circ,180^\circ$

(3) 分离点：

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+4}=0$$

整理得：$3d^2+12d+8=0$

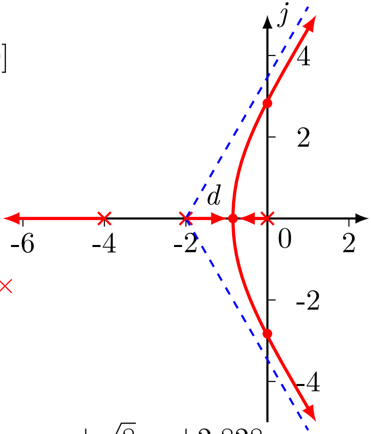
解得：$d_1=-0.845$✓，$d_2=-3.155$×

$$K_d^*=|d||d+2||d+4|\overset{d=-0.845}{=}3.08$$

(4) 与虚轴交点：

$$D(s)=s^3+6s^2+8s+K^*=0$$

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[D(j\omega)]=-\omega^3+8\omega=0\\ \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-6\omega^2+K^*=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\omega=\pm\sqrt{8}=\pm 2.828\\ K_\omega^*=48\end{cases}$$

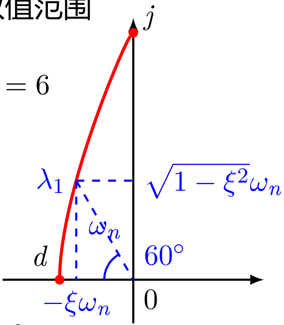


例 18 [续] 利用根轨迹分析系统性能

(A) 使系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围

依题，对应 $0<\xi<1$，有：$\begin{cases} 3.08 < K^* < 48 \\ \frac{3.08}{8} < K = \frac{K^*}{8} < \frac{48}{8} = 6 \end{cases}$

(B) 复极点对应 $\xi = 0.5(\beta = 60^\circ)$ 时 K 的值及闭环极点位置



设 $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi}\omega_n$

由根之和 $C = 0-2-4 = -6 = -2\xi\omega_n + \lambda_3$

$\lambda_3 = -6 + 2\xi\omega_n = -6 + \omega_n$，应有：

$$\begin{aligned} D(s) &= s(s+2)(s+4) + K^* = s^3 + 6s^2 + 8s + K^* \\ &= (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s+6-\omega_n) \\ &= s^3 + 6s^2 + 6\omega_n s + \omega_n^2(6-\omega_n) \end{aligned}$$

比较系数

$\begin{cases} 6\omega_n = 8 \\ \omega_n^2(6-\omega_n) = K^* \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} \omega_n = 4/3 \\ K^* = 8.3 \end{cases}$ $\begin{cases} K = K^*/8 = 1.0375 \\ \lambda_{1,2} = -0.667 \pm j1.1547 \\ \lambda_3 = -6 + \omega_n = -4.667 \end{cases}$

例 18 [续] 利用根轨迹分析系统性能

(C) 当 $\lambda_3 = -5$ 时，$\lambda_{1,2} = ?$ 相应 $K = ?$

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 8s + K^*$$

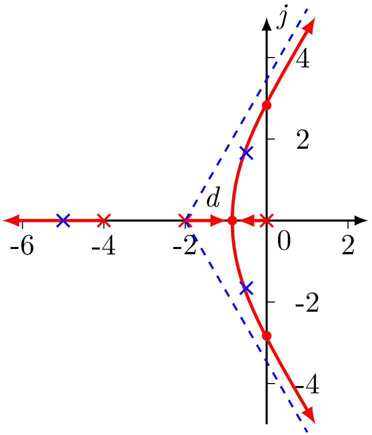
$$\begin{array}{r l}
 & s^2 + s + 3 \\
s+5 \,\big) & s^3 + 6s^2 + 8s + K^* \\
 & \underline{s^3 + 5s^2} \\
 & s^2 + 8s \\
 & \underline{s^2 + 5s} \\
 & 3s + K^* \\
 & \underline{3s + 15} \\
 & 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow K^* = 15, \quad D(s) = (s+5)(s^2+s+3)$$

$$\lambda_{1,2} = -0.5 \pm j1.6583$$

$$K^* = 15$$

$$K = K^*/8 = 15/8 = 1.875$$

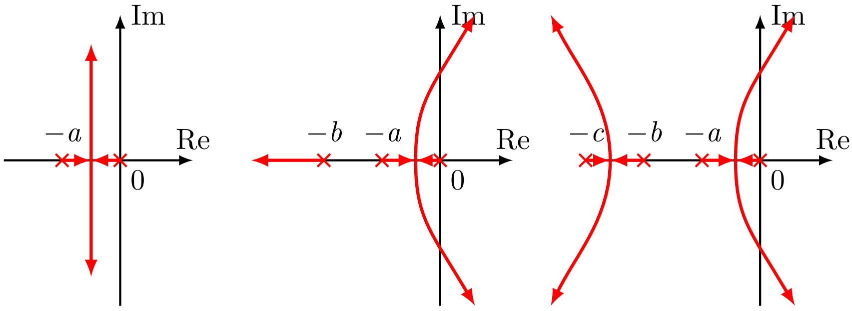


接下来...

开环极点对根轨迹的影响

例 19 系统开环传递函数

$(a)\quad \dfrac{K}{s(s+a)} \qquad (b)\quad \dfrac{K}{s(s+a)(s+b)} \qquad (c)\quad \dfrac{K}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$



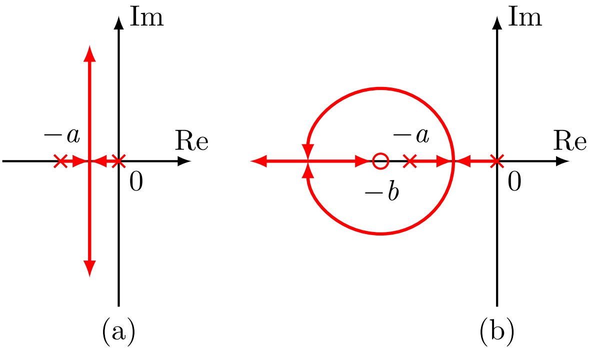
(a) (b) (c)

大致上讲，在开环传递函数加入左半平面的极点具有将原来的根轨迹向右半平面推的效果。

接下来...

开环零点对根轨迹的影响

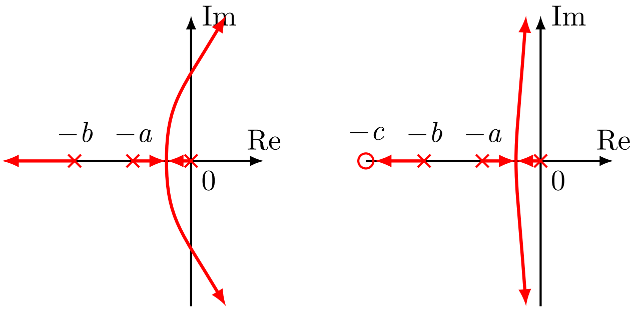
例 20 系统开环传递函数 $(a)\quad \frac{K}{s(s+a)}\qquad (b)\quad \frac{K(s+b)}{s(s+a)}$



大致上讲，在开环传递函数中加入左半平面的零点具有使原来的根轨迹向左半平面推移的效果。

开环零点对根轨迹的影响

例 20 [续] 系统开环传递函数 $(c)\ \dfrac{K}{s(s+a)(s+b)}$ $(d)\ \dfrac{K(s+c)}{s(s+a)(s+b)}$



(c) (d)

大致上讲，在开环传递函数中加入左半平面的零点具有使原来的根轨迹向左半平面推移的效果。

课程小结

$$\text{绘制根轨迹} \xrightarrow[\text{闭环零极点}]{\text{依条件定}} \begin{cases} 1\ \text{相角条件} \\ 2\ \text{模值条件} \\ 3\ \text{试根} \\ 4\ \text{长除法} \\ 5\ \text{根之和} \\ 6\ \text{比较系数} \\ 7\ \text{解根} \end{cases}$$