最优控制理论与系统

第二章 最优控制中的变分法

张永韡

江苏科技大学
电子信息学院
yongwzhang@gmail.com

2016 年 10 月 26 日

本章主要内容

1. 变分法基础
2. 无约束条件的泛函极值问题
3. 有约束条件的泛函极值—动态系统的最优控制问题
4. 小结

- 在最优控制问题中，性能指标是一个泛函，性能指标最优即泛函达到极值。
- 解决泛函极值问题 $\longrightarrow$ 变分法。
- 下面列出变分法中的一些主要结果，大部分不加证明，可对照微分学中的结果来理解。

基本概念

- 距离空间：实函数 $d(x, y)$ 满足非负，对称，三角
- 完备距离空间：距离空间中每个柯西序列均收敛于该空间
- 开集：没有外皮
- 线性赋范空间：“有范”，非负，三角，叠加
- 希尔伯特空间：用内积定义距离的线性赋范空间
- 控制向量函数空间：在线性空间中用函数（时间闭区间上函数分量之和）的内积定义范数
- 若控制向量空间完备，则有了衡量函数相似性的工具

变分学预备定理

Theorem 1

设

$$\int_a^b M(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$h(a), h(b) = 0$，若 $h(x)$ 为任意，则 $M(x) = 0$。

几何证明.

若 $h(x)$ 为在 $[a,b]$ 之间任意的 $\delta(t)$ 函数（脉冲函数），则在该点 $M(x)$ 必须为 0。因为 $[a,b]$ 之间处处可取 $h(x) = \delta(t)$，则 $M(x)$ 处处为 0。 □

代数证明.

令 $h(x) = -M(x)(x-a)(x-b)$，有

$$M \cdot h = M^2(-(x-a)(x-b))$$

因为 $M^2 \geq 0$，$-(x-a)(x-b) > 0$，如果 $\int Mh = 0$，必有 $M = 0$。 □

基本定义

1、泛函： 如果对某一类函数 $\{X(t)\}$ 中的每一个函数 $X(t)$，有一个实数值 J 与之相对应，则称 J 为依赖于函数 $X(t)$ 的泛函，记为

$$J = J[X(t)]$$

粗略来说，泛函是以函数为自变量的函数。

2、泛函的连续性： 若对任给 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 当 $\|X(t) - \hat{X}(t)\| < \delta$ 时，就有

$$|J(X) - J(\hat{X})| < \epsilon$$

则称 $J(X)$ 在 $\hat{X}$ 处是连续的。 3、线性泛函： 满足下面条件的泛函称为线性泛函

$$J[\alpha X] = \alpha J[X]$$

$$J(X + Y) = J(X) + J(Y)$$

这里 α 是实数，X 和 Y 是函数空间中的函数。

4、自变量函数的变分： 自变量函数 $X(t)$ 的变分 δ 是指同属于函数类 $X(t)$ 中两个函数 $X_1(t)$、$X_2(t)$ 之差

$$\delta X = X_1(t) - X_2(t)$$

这里，t 看作为参数。当 $X(t)$ 为一维函数时，δX 可用图2-1来表示。

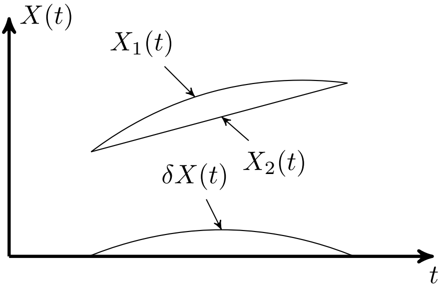


图 2-1: 自变量函数的变分

5、泛函的变分： 当自变量函数 $X(t)$ 有变分 δX 时，泛函的增量为

$$\Delta J = J[X+\delta X] - J[X] = \delta J[X, \delta X] + \epsilon \|\delta X\|$$

这里，$\delta J[X, \delta X]$ 是 δX 的线性泛函，若 $\|\delta X\| \to 0$ 时，有 $\epsilon \|\delta X\| \to 0$，则称 $\delta J[X, \delta X]$ 是泛函 $J[X]$ 的变分。δJ 是 ΔJ 的线性主部。
6、泛函的极值： 若存在 $\epsilon > 0$，对满足 $\|X - X^*\| < \epsilon$ 的一切 X，$J(X) - J(X^*)$ 具有同一符号，则 $J(X)$ 称在 $X = X*$ 处有极值。

Theorem 2

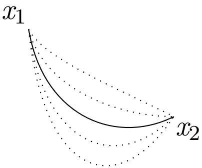
$J(X)$ 在 $X = X^*$ 处有极值的必要条件是对于所有容许的增量函数 δX（自变量的变分），泛函 $J(X)$ 在 X^* 处的变分为零

$$\delta J(X^*, \delta X) = 0$$

为了判别是极大还是极小，要计算二阶变分 $\delta^2 J$。但在实际问题中根据问题的性质容易判别是极大还是极小，故一般不计算 $\delta^2 J$。

变分的概念

以求解最速降线为例:



令

$$\bar{F}(x) - F(x) = D(x)$$

其中 $\bar{F}(x)$ 为可能的泛函集合，$F(x)$ 为所求轨迹

$$\epsilon \frac{D(x)}{\epsilon} = \epsilon\eta, \quad \eta = \frac{D(x)}{\epsilon} \Rightarrow \bar{F}(x) = F(x) + \epsilon\eta$$

ϵ 必须在 x_1 和 x_2 点消失，否则不合题意，因为在 x_1 和 x_2 点 $F(x)$ 就是最佳轨迹。

Euler 方程推导

以最速降线为例:

$$I(\epsilon) = T(\bar{y}) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+(\bar{y}')^2}{2g\bar{y}}}\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\bar{y},\bar{y}')\,\mathrm{d}x$$

$$\bar{y} = y + \epsilon\eta, \bar{y}' = y' + \epsilon\eta' \Rightarrow$$

$$T(\bar{y}) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y+\epsilon\eta, y'+\epsilon\eta')\,\mathrm{d}x$$

一个重要的观察:x,y,y' 都是 x 的函数,当积分后,会成为确切的值,唯独 ϵ 不定,因此上式积分后的结果是 ϵ 的函数 $I(\epsilon)$。当 $\epsilon \to 0$ 时,$I(\epsilon)$ 为泛函极值,所有 $\bar{y}$ 函数收敛至 y,成为极值,且在该处变分为 0。

令

$$F(x, y+\epsilon\eta, y'+\epsilon\eta') = F(x, u, v)$$

对 ϵ 取偏微分，

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \epsilon} = \frac{\partial F}{\partial u}\eta + \frac{\partial F}{\partial v}\eta'$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial \epsilon}\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} (\frac{\partial F}{\partial u}\eta + \frac{\partial F}{\partial v}\eta')\,\mathrm{d}x$$

当 $\epsilon \to 0$ 时，u 和 v 趋近于 y 和 y'。因此 $\epsilon = 0$ 时 $u = y, v = y'$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} (\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta')\,\mathrm{d}x \quad (\eta' = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x})$$

分部积分

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

令 $u = \frac{\partial F}{\partial y'}$，$v = \eta$，则

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \eta |_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\frac{\partial F}{\partial y'}) \, \mathrm{d}x = - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\frac{\partial F}{\partial y'}) \, \mathrm{d}x$$

(η 在端点处为 0)，代回 $\frac{dI}{d\epsilon}$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\frac{\partial F}{\partial y'}) \eta \right] \, \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\frac{\partial F}{\partial y'}) \right] \eta \, \mathrm{d}x = 0$$

(因为泛函取极值，对 ϵ 的导数为 0，且由引理，方括号内部分为 0:)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\frac{\partial F}{\partial y'}) = 0$$

而 $y(x_1) = y_1$ 和 $y(x_2) = y_2$ 就是求解上式所需要的边界条件。

Euler 方程第二种形式

$$\overbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y,y')}^{A}=\overbrace{\frac{\partial F}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1}}^{B}+\overbrace{\frac{\partial F}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{y'}}^{C}+\overbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}\underbrace{\frac{\partial y'}{\partial x}}_{y''}}^{D}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'\frac{\partial F}{\partial y'})=\underbrace{y''\frac{\partial F}{\partial y'}}_{D=A-B-C}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\partial F}{\partial y'})$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'\frac{\partial F}{\partial y'})=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}y'+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\partial F}{\partial y'})$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'\frac{\partial F}{\partial y'})=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial F}{\partial x}-y'\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\partial F}{\partial y'})\right)}_{=0:\ \text{Euler 1}}$$

Euler 方程第二种形式

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'\frac{\partial F}{\partial y'}) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}) = 0$$

当 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ 时（x 不显含在 F 中时），有

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

求解最速降线

$$T=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x$$

$$F=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}(2gy)^{-\frac{1}{2}}\qquad \frac{\partial F}{\partial x}=0\quad x\text{不显含}$$

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=C$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=(2gy)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}2y'$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}-(2gy)^{-\frac{1}{2}}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}y'^2=C$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}-\frac{y'^2}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}}=C\quad \%\text{通分}$$

$$\Rightarrow \frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = C \quad \text{%上下颠倒，平方}$$

$$\Rightarrow 2gy(1+y'^2) = \frac{1}{C^2} \quad \text{%}2g\text{除下来}$$

$$\Rightarrow \left[1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2\right] y = \frac{1}{2gC^2} = k \quad \text{%}y\text{除下来，减1}$$

$$\Rightarrow (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 = \frac{k}{y} - 1 = \frac{k-y}{y} \quad \text{%先开方，变量分离}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{k-y}{y}} \Rightarrow \sqrt{\frac{y}{k-y}}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

$$\xRightarrow[\mathrm{d}y=\frac{k}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta]{y=\frac{k}{2}(1-\cos\theta)} \sqrt{\frac{y}{k-y}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\frac{k}{2}(1-\cos\theta)}{k-\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\cos\theta}}\,\mathrm{d}y$$

$$\xrightarrow{\text{上下除}\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}}\frac{k}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1-\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow (1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\frac{k}{2} = \mathrm{d}x$$

$$\xrightarrow{\text{两边积分}} \begin{array}{l} x = \frac{k}{2}(\theta-\sin\theta)+C \\ y = \frac{k}{2}(1-\cos\theta) \end{array}$$

$\because$ 一开始 $y=0$，则 θ 一开始也为 0。在开始点 θ 为 0，同时 x，y 均为 0，则 $C=0$。

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{k}{2}(\theta-\sin\theta) \\ y = \frac{k}{2}(1-\cos\theta) \end{cases} \rightarrow \text{摆线}$$

自变量函数为标量的泛函极值

求极值曲线 $x(t)=x^*(t)$，使下面的性能泛函取极值

$$J=\int_{t_0}^{t_f} F[x(t),\dot{x}(t),t]\,\mathrm{d}t \tag{2-1}$$

为此，让自变量函数 $x(t)$、$\dot{x}(t)$ 在极值曲线 $x^*(t)$、$\dot{x}^*(t)$ 附近发生微小变分 δx、$\delta\dot{x}$，即

$$x(t)=x^*(t)+\delta x(t)$$
$$\dot{x}(t)=\dot{x}^*(t)+\delta\dot{x}(t)$$

于是泛函 J 的增量 ΔJ 可计算如下（以下将 * 号省去）

$$\begin{aligned}\Delta J&=\int_{t_0}^{t_f} F[x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t]-F[x,\dot{x},t]\,\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_f}\{\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}+o[(\delta x)^2,(\delta\dot{x})^2]\}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

上式中 $o[(\delta x)^2,(\delta\dot{x})^2]$ 是高阶项。

根据定义，泛函的变分 δJ 是 ΔJ 的线性主部，即

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} [\{\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}]\,\mathrm{d}t$$

对上式第二项作分部积分，按公式，见教材 16 页

$$\int_{t_0}^{t_f} u\,\mathrm{d}v = uv|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} v\,\mathrm{d}u$$

可得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} [\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})]\delta x\,\mathrm{d}t + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f} \tag{2-2}$$

J 取极值的必要条件是 δJ 等于零。因 δx 是任意的，要使(2-2)中第一项（积分项）为零，必有

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}) = 0 \tag{2-3}$$

上式称为欧拉——拉格朗日方程。

(2-2)式中第二项为零的条件要分两种情况来讨论：
1、固定端点的情况
这时 $x(t_0)=x_0, x(t_f)=x_f$，它们不发生变化，所以 $\delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0$。
而(2-2)中第二项可写成

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f} = (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})_{t=t_f}\cdot\delta x(t_f) - (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})_{t=t_0}\cdot\delta x(t_0) \tag{2-4}$$

当 $\delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0$ 时，(2-4)式自然为零。
2、自由端点的情况
这时 $x(t_0)$ 和 $x(t_f)$ 可以发生变化，$\delta x(t_0)\neq 0, \delta x(t_f)\neq 0$，而且可以独立地变化。于是要使(2-2)中第二项为零，由(2-4)式可得

$$(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})_{t=t_f}\cdot\delta x(t_f) = 0 \tag{2-5}$$

$$(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})_{t=t_0}\cdot\delta x(t_0) = 0 \tag{2-6}$$

因为这里讨论 $x(t)$ 是标量函数的情况，$\delta x(t_0)$ 和 $\delta x(t_f)$ 也是标量，且是任意的，故(2-5)、(2-6)可化为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_f}=0 \tag{2-7}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=t_0}=0 \tag{2-8}$$

(2-7)、(2-8)称为横截条件。当边界条件全部给定（即固定端点）时，不需要这些横截条件。当 $x(t_0)$ 给定时，不要(2-8)。当 $x(t_f)$ 给定时，不要(2-7)。见教材 23 页表 2-1. 其他情况见教材 23-28 页，汇总结果见 27 页表 2-2。

自变量函数为向量的泛函极值

现在，将上面对 $x(t)$ 是标量函数时所得到的公式推广到 $X(t)$ 是 n 维向量函数的情况。这时，性能泛函为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(X, \dot{X}, t)\,\mathrm{d}t \tag{2-9}$$

式中

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \cdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \tag{2-10}$$

泛函变分由(2-2)式改为

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \delta X^T \left[\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right)\right] \mathrm{d}t + \delta X^T \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right|_{t_0}^{t_f}$$

自变量函数为向量的泛函极值

向量欧拉——拉格朗日方程为

$$\frac{\partial F}{\partial X}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right)=0$$

式中

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial F}{\partial x_n}\end{bmatrix}\qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{X}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n}\end{bmatrix}\tag{2-11}$$

横截条件为（自由端点情况）

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}=0\qquad (\text{if } t=t_0 \text{ and } t=t_f)$$

例 2 - 1

求通过点 (0 , 0) 及 (1 , 1) 且使

$$J = \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2)\,\mathrm{d}t$$

取极值的轨迹 $x^*(t)$。本例与教材 17 页例子不同。

解：这是固定端点问题，相应的欧拉——拉格朗日方程为

$$2x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\dot{x}) = 0$$

即

$$\ddot{x} - x = 0$$

它的通解形式为

$$x(t) = A\mathrm{ch}t + B\mathrm{sh}t$$

式中：

$$\mathrm{ch}t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{双曲余弦，或写为}\cosh t$$

$$\mathrm{sh}t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{双曲正弦，或写为}\sinh t$$

由初始条件 $x(0)=0$，可得 $A=0$。再由终端条件 $X(1)=1$，可得 $B=1/\mathrm{sh}1$，因而极值轨迹为

$$x^*(t) = \mathrm{sh}t/\mathrm{sh}1$$

例 2-2

求使指标

$$J = \int_0^1 (\dot{x}^2 + \dot{x}^3)\,\mathrm{d}t$$

取极值的轨迹 $x^*(t)$，并要求 $x^*(0) = 0$，但对 $x^*(1)$ 没有限制。

解：终端自由，欧拉—拉格朗日方程为（见式(2-3)）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\dot{x} + 3\dot{x}^2) = 0$$

即

$$2\dot{x} + 3\dot{x}^2 = C$$

于是 $\dot{x}$ 是常数，x 则是时间的线性函数，令

$$x(t) = At + B$$

由 $x(0)=0$ 可得 $B=0$，又终端是自由的，由式(2-7)可得横截条件为，见教材 23 页表 1

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=1} = (2\dot{x} + 3\dot{x}^2)_{t=1} = 0$$

即

$$2A + 3A^2 = 0$$

由上式解得 $A=0$ 或 $A=-2/3$。$A=0$ 时的极值轨迹为 $x^*(t)=0$；$A=-2/3$ 时的极值轨迹为 $x^*(t)=-2t/3$。容易验证 $x(t)=0$ 时，$J=0$ 对应局部极小；$x(t)=-2t/3$ 时，$J=4/27$，对应局部极大。

有约束条件的泛函极值

前面讨论泛函极值问题时，对极值轨迹 $X^*(t)$ 没有附加任何约束条件。但在动态系统最优控制问题中，极值轨迹必须满足系统的状态方程，也就是要受到状态方程的约束。考虑下列系统

$$\dot{X} = f[X(t), U(t), t] \tag{2-12}$$

式中，$X(t)$ 为 n 维状态向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量（这里假定 $U(t)$ 不受限制，否则不能用变分法求解，而要用极小值原理或动态规划法求解）$f[X(t), U(t), t]$ 是 n 维连续可微的向量函数。性能指标如下：

$$J = \varphi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[X(t), U(t), t]\,\mathrm{d}t \tag{2-13}$$

这是综合指标。求出最优控制 $U^*(t)$ 和满足状态方程的极值轨迹 $X^*(t)$，使性能指标取极值。

终端时刻 t_f 固定时的最优控制

t_f 固定时的最优控制数学描述如下

$$\min_{u(t)} J = \varphi[X(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} F[X(t), U(t), t]\,\mathrm{d}t$$

$$\text{s.t.}\quad f[X(t), U(t), t] - \dot{X} = 0,\ \ X(t_0) = X_0,\ \ \Psi[X(t_f)] = 0$$

其中 $\Psi[X(t_f)] = 0$ 为目标集，与有约束条件的函数极值情况类似，引入两个待定的拉格朗日乘子向量函数 $\lambda(t) \in R^n$，$\gamma(t) \in R^r$

$$J_a = \varphi[X(t_f)] + \gamma^T(t)\Psi[X(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} \{F[X, U, t] + \lambda^T(t)[f(X, U, t) - \dot{X}]\}\,\mathrm{d}t$$

再引入一个标量函数

$$H(X, U, \lambda, t) = F(X, U, t) + \lambda^T f(X, U, t)$$

它称为哈密顿（Hamilton）函数，在最优控制中起着重要的作用

$$J_a = \varphi[X(t_f)] + \gamma^T(t)\Psi[X(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} \{H[X, U, \lambda, t] - \lambda^T(t)\dot{X}\}\,\mathrm{d}t$$

对上式积分号内第二项作分部积分后可得

$$J_a = \varphi[X(t_f)] + \gamma^T(t)\Psi[X(t_f)] - \lambda^T(t_f)X(t_f) + \lambda^T(t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \{H[X, U, \lambda, t] + \dot{\lambda}^T(t)X\}\,\mathrm{d}t$$

见教材 30 页 2-71 及其上边的式子

设 $X(t)$、$U(t)$ 相对于最优值 $X^*(t)$、$U^*(t)$ 的变分分别为 $\delta X(t)$ 和 $\delta U(t)$

下面来计算由这些变分引起的泛函 J_a 的变分 δJ_a。

$$\delta J_a = \delta X^T(t_f)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial \Psi^T}{\partial X(t_f)}\gamma(t_f)\right] + \int_{t_0}^{t_f}\left[\delta X^T(\frac{\partial H}{\partial X} + \dot{\lambda}) + \delta U^T \frac{\partial H}{\partial U}\right] \mathrm{d}t$$

J_a 为极小的必要条件是：对任意的 δX、δU、$\delta X(t_f)$，变分 δJ_a 等于零，则广义泛函取极值的必要条件为，见 30-31 页式子 (2-73)–(2-77)

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \qquad \text{(协态方程)}$$

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(X, U, t) \qquad \text{(状态方程)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \qquad \text{(控制方程)}$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial \Psi^T}{\partial X(t_f)}\gamma(t_f) \qquad \text{(横截条件)}$$

末端时刻固定时最优解的必要条件汇总见 32 页-34 页

例 2-3

设系统状态方程为

$$\dot{x} = -x(t) + u(t)$$

$x(t)$ 的边界条件为 $x(0) = 1$，$x(t_f) = 0$。求最优控制 $u(t)$，使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} (x^2 + u^2)\,\mathrm{d}t$$

为最小，其中 t_f 固定不变。

解：这里 $x(0)$、$x(t_f)$ 均给定，故不需要横截条件。作哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + \lambda(-x + u)$$

则协态方程和控制方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x + \lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0$$

即

$$u = -\lambda$$

故可得正则方程

$$\dot{x} = -x(t) - \lambda(t)$$

$$\dot{\lambda} = -x(t) + \lambda(t)$$

对正则方程进行拉氏变换，可得

$$sX(s) - x(0) = -X(s) - \lambda(s) \tag{2-14}$$

$$s\lambda(s) - \lambda(0) = -X(s) + \lambda(s) \tag{2-15}$$

由(2-14)式可求得

$$X(s) = \frac{x(0) - \lambda(s)}{s+1} \tag{2-16}$$

代入(2-15)，即得

$$(s^2 - 2)\lambda(s) = (s+1)\lambda(0) - x(0)$$

于是，解出 $\lambda(s)$ 为

$$\lambda(s) = \frac{(s+1)\lambda(0) - x(0)}{s^2 - 2} = \frac{s+1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}\lambda(0) - \frac{1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}x(0)$$

反变换可求得

$$\begin{aligned}\lambda(t) =& \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t})x(0) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}\right]\lambda(0)\end{aligned}$$

$$X(s) = \frac{s-1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}x(0) - \frac{1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}\lambda(0)$$

故

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t}\right]x(0) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t})\lambda(0)$$

由 $x(0)=1$，$x(t_f)=0$ 分别代入上式可得

$$\lambda(0) = \frac{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t_f} + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t_f}}{e^{\sqrt{2}t_f} - e^{-\sqrt{2}t_f}}$$

把 $\lambda(0)$ 代入可得 $\lambda(t)$，而最优控制为

$$u^*(t) = -\lambda(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t} + \frac{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t_f} + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t_f}}{e^{\sqrt{2}t_f} - e^{-\sqrt{2}t_f}}\left[(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}\right]\right\}$$

例 2-4

设系统的状态方程为

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

初始条件为

$$x_1(0) = 1 \qquad x_2(0) = 1$$

终端条件为

$$x_1(1) = 0$$

$x_2(1)$ 自由，要求确定最优控制 $u^*(t)$，使指标泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)\,\mathrm{d}t$$

取极小值

解：这里 $x_2(1)$ 是自由的，所以要用到横截条件，因终端指标 $\varphi[X(t_f)]=0$，$\Psi[X(t_f)]=x_1(t_f)=0$ 所以

$$\lambda_2(1)=\frac{\partial\Psi}{\partial X_2(1)}=0 \tag{2-17}$$

作哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u \tag{2-18}$$

$$\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0$$

$$\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda_2=0$$

得

$$u^*(t) = -\lambda_2(t) \tag{2-19}$$

将 $u^*(t)$ 代入状态方程，可得

$$\dot{x}_1 = x_2(t) \tag{2-20}$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda_2(t) \tag{2-21}$$

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \tag{2-22}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1(t) \tag{2-23}$$

边界条件为

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1 \qquad x_2(0) = 1 \\ x_1(1) &= 0 \qquad \lambda_2(1) = 0 \end{aligned} \tag{2-24}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= c_1 \\
\lambda_2(t) &= -c_1 t + c_2 \\
x_1(t) &= \frac{1}{6}c_1 t^3 - \frac{1}{2}c_2 t^2 + c_3 t + c_4 \\
x_2(t) &= \frac{1}{2}c_1 t^2 - c_2 t + c_3
\end{aligned}
$$

代入边界条件，可得

$$c_1 = c_2 = 6, \quad c_3 = c_4 = 1$$

最后可得最优状态轨迹

$$
\begin{aligned}
x_1^*(t) &= 1 + t - 3t^2 + t^3 \\
x_2^*(t) &= 1 - 6t + 3t^2
\end{aligned}
$$

最优控制为

$$u^*(t) = 6(t-1)$$

终端时刻自由时的最优控制

t_f 自由时的最优控制数学描述如下

$$\min_{u(t)} J = \varphi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[X(t), U(t), t]\,\mathrm{d}t$$
$$\text{s.t.}\quad f[X(t), U(t), t] - \dot{X} = 0,\ \ X(t_0) = X_0, \Psi[X(t_f), t_f] = 0$$

与有约束条件的函数极值情况类似，引入两个待定的拉格朗日乘子向量函数 $\lambda(t) \in R^n$， $\gamma(t) \in R^r$

$$\begin{aligned} J_a &= \varphi[X(t_f), t_f] + \gamma^T \Psi[X(t_f), t_f] + \\ &\int_{t_0}^{t_f} \{F(X, U, t) + \lambda^T(t)[f(X, U, t) - \dot{X}]\}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

引入哈密顿函数

$$H(X, U, \lambda, t) = F(X, U, t) + \lambda^T f(X, U, t)$$

$$J_a = \varphi[X(t_f), t_f] + \gamma^T \Psi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(X, U, \lambda, t) - \lambda^T \dot{X}]\,\mathrm{d}t$$

令

$$\theta[X(t_f), t_f] = \varphi[X(t_f), t_f] + \gamma^T \Psi[X(t_f), t_f]$$

则

$$J_a = \theta[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(X, U, \lambda, t) - \lambda^T \dot{X}] \, \mathrm{d}t$$

与 t_f 固定时的情况不同，现在 δJ_a 由 δU、δX、$\delta X(t_f)$ 和 δt_f 所引起。这里 δt_f 不再为零，而 $\delta X(t_f)$ 可计算如下：

令

$$t_f = t_f^* + \delta t_f$$

$$\begin{aligned} \delta X(t_f) = X(t_f) - X^*(t_f^*) &= X(t_f^* + \delta t_f) + \delta X(t_f^*) - X(t_f^*) \\ &\approx \delta X(t_f^*) + X(t_f^*)\delta t_f \end{aligned} \tag{2-25}$$

注意，这里 $\delta X(t_f)$ 和 $\delta(t_f^*)$ 不同，故 * 号不能省去。上式表明 $\delta X(t_f)$ 由两部分组成：一是在 t_f^* 时函数 $X(t_f)$ 相对 $X^*(t_f)$ 的变化 $\delta X(t_f^*)$.
另一是因 t_f 的变化所引起的函数值的变化量 $[X(t_f^* + \delta t) - X(t_f^*)]$ 后者可用它的线性主部 $\dot{X}(t_f^*)\delta t_f$ 来近似。

现在来计算 δJ_a（只计算到一阶小量）。

$$\delta J_a = \left[\frac{\partial\theta}{\partial X(t_f)}\right]_*^T \delta X(t_f) + \left[\frac{\partial\theta}{\partial t_f}\right]_* \delta t_f +$$
$$\int_{t_0}^{t_f^*} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^T \delta X + \left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)^T \delta U - \lambda^T \delta \dot{X}\right]_* \mathrm{d}t +$$
$$\int_{t_f^*}^{t_f^*+\delta t_f} [H(X+\delta X, U+\delta U, \lambda, t) - \lambda^T(\dot{X}+\delta\dot{X})]_* \,\mathrm{d}t$$

对第三项作分部积分，可得

$$\int_{t_0}^{t_f^*} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^T \delta X + \left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)^T \delta U - \lambda^T \delta \dot{X}\right]_* \mathrm{d}t =$$
$$\int_{t_0}^{t_f^*} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial X} + \dot{\lambda}\right)^T \delta X + \left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)^T \delta U\right]_* \mathrm{d}t - \lambda^T(t_f^*)\delta X(t_f^*)$$

第四项可表示为（忽略二阶小量）

$$\begin{aligned}&\int_{t_f^*}^{t_f^*+\delta t_f}[H(X,U,\lambda,t)+(\frac{\partial H}{\partial X})^T\delta X+(\frac{\partial H}{\partial U})^T\delta U-\lambda^T\dot{X}-\lambda^T\delta\dot{X}]_*\,\mathrm{d}t\\&\approx H^*(X,U,\lambda,t)\delta t_f-\lambda^T(t_f^*)\dot{X}(t_f^*)\delta t_f\\&=H^*\delta t_f-\lambda^T(t_f^*)[\delta X(t_f)-\delta X(t_f^*)]\end{aligned}$$

上式最后一个等号用到了(2-25)式。H^* 表示 H 的自变量取最优值时 H 的值。根据上面的结果可得

$$\begin{aligned}\delta J_a=&\left[\frac{\partial\theta}{\partial X(t_f)}\right]_*^T\delta X(t_f)+\left[\frac{\partial\theta}{\partial t_f}\right]_*\delta t_f+\\&\int_{t_0}^{t_f^*}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial X}+\dot{\lambda}\right)^T\delta X+\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)^T\delta U\right]_*\mathrm{d}t+H^*\delta t_f-\lambda^T(t_f^*)\delta X(t_f)\end{aligned}$$

J_a 取极值的必要条件为 $\delta J_a = 0$ 因 $\delta X(t_f)$、δt_f、X、U 为任意，故得(省去 * 号)

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad \text{(协态方程)} \tag{2-26}$$

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \text{(状态方程)} \tag{2-27}$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \quad \text{(控制方程)} \tag{2-28}$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial X(t_f)} = \frac{\partial \varphi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial \Psi^T}{\partial X(t_f)}\gamma \quad \text{(横截方程)} \tag{2-29}$$

$$H(t_f) = -\frac{\partial \theta}{\partial t_f} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f} - \frac{\partial \Psi^T}{\partial t_f}\gamma \tag{2-30}$$

与 t_f 固定情况相比，这里多了一个方程，$H(t_f) = -\frac{\partial \theta}{\partial t_f}$，用它可求出最优终端时间 $t_f = t_f^*$。以上结果的汇总见教材 38-40 页。

例 2 - 5

设系统状态方程为

$$\dot{x} = u$$

边界条件为

$$x(0) = 1 \qquad x(t_f) = 0 \qquad t_f \text{自由}$$

性能指标为

$$J = t_f + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2 \,\mathrm{d}t$$

要求确定最优控制 u^*，使 J 最小。

解：这是 t_f 自由问题。终端状态固定，$x(t_f) = 0$ 是满足约束集的特殊情况，即

$$\Psi[X(t_f), t_f] = x(t_f) = 0$$

作哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}u^2 + \lambda u$$

正则方程是

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

控制方程是

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0 \qquad u = -\lambda$$

因边界条件全部给定，故不用横截条件。确定最优终端时刻的条件(2-49)式为

$$H(t_f) = -\frac{\partial \theta}{\partial t_f} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f} = -\frac{\partial t_f}{\partial t_f} = -1$$

将 $u(t) = -\lambda(t)$ 代入，可得

$$\frac{1}{2}u^2(t_f) + \lambda(t_f)u(t_f) = -1$$

即

$$\frac{1}{2}\lambda^2(t_f) - \lambda^2(t_f) + 1 = 0$$

由上式求得 $\lambda(t_f) = \sqrt{2}$ 因为由正则方程 $\dot{\lambda} = 0$，所以 $\lambda(t) = \lambda(t_f) = \sqrt{2}$，于是最优控制

$$u^*(t) = -\sqrt{2}$$

再由正则方程 $\dot{x} = u = -\lambda$，可得

$$x(t) = -\sqrt{2}t + c$$

由初始条件 $x(0) = 1$，求得 $c = 1$，故最优轨迹为

$$x^*(t) = -\sqrt{2}t + 1$$

以终端条件

$$x^*(t_f^*) = 0$$

代入上式，即求得最优终端时刻

$$t_f^* = \sqrt{2}/2$$

火箭发射最优程序问题

例 2-6

设火箭在垂直平面内运动，加速度 $a(t)$ 与水平面夹角为 $\theta(t)$，$\theta(t)$ 是控制作用，见图2-2。令

$$x_1 = V_L(t) \quad \text{（水平速度）}$$
$$x_2 = V_h(t) \quad \text{（垂直速度）}$$
$$x_3 = L(t) \quad \text{（水平距离）}$$
$$x_4 = h(t) \quad \text{（垂直高度）}$$

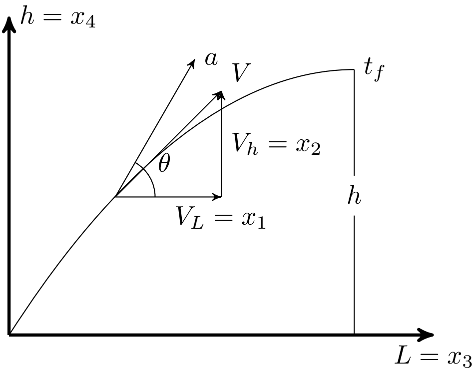


图 2-2: 火箭发射示意图

忽略重力和空气阻力时，系统的状态方程和初始条件为

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a\cos\theta \qquad & x_1(0) &= 0 \\
\dot{x}_2 &= a\sin\theta \qquad & x_2(0) &= 0 \\
\dot{x}_3 &= x_1 \qquad & x_3(0) &= 0 \\
\dot{x}_4 &= x_2 \qquad & x_4(0) &= 0
\end{aligned}
\tag{2-31}
$$

终端状态为

$$
\begin{aligned}
x_1(t_f) &= U \\
x_2(t_f) &= 0 \\
x_3(t_f) &\text{自由} \\
x_4(t_f) &= h_f
\end{aligned}
$$

要求选择最优控制程序 $u(t) = \theta(t)$，使性能指标

$$
J = \int_0^{t_f} \mathrm{d}t = t_f
$$

为最小。

解：因为要求 t_f 最小，故是 t_f 自由问题。由给定的终端状态可得三个约束方程为

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= x_1(t_f) - U = 0 \\ \Psi_2 &= x_2(t_f) = 0 \\ \Psi_3 &= x_4(t_f) - h_f = 0 \end{aligned} \tag{2-32}$$

作哈密顿函数

$$H = F + \lambda^T f = 1 + \lambda_1 a\cos\theta + \lambda_2 a\sin\theta + \lambda_3 x_1 + \lambda_4 x_2$$

协态方程为

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\lambda_3 \qquad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_4 \tag{2-33}$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0 \qquad \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = 0 \tag{2-34}$$

横截条件为

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial\varphi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial\Psi^T}{\partial X(t_f)}\gamma = \frac{\partial\Psi^T}{\partial X(t_f)}\gamma$$

即

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(t_f)\\\lambda_2(t_f)\\\lambda_3(t_f)\\\lambda_4(t_f)\end{bmatrix} = \frac{\partial[\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3]}{\partial X(t_f)}\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}\gamma_1 + \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1}\gamma_2 + \frac{\partial\Psi_3}{\partial x_1}\gamma_3\\\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2}\gamma_1 + \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}\gamma_2 + \frac{\partial\Psi_3}{\partial x_2}\gamma_3\\\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_3}\gamma_1 + \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_3}\gamma_2 + \frac{\partial\Psi_3}{\partial x_3}\gamma_3\\\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_4}\gamma_1 + \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_4}\gamma_2 + \frac{\partial\Psi_3}{\partial x_4}\gamma_3\end{bmatrix}$$

上式右端矩阵中 x_i，$i = 1, 2, 3, 4$ 的自变量 t_f 已省略。由(2-32)式求出上式中的偏导数，可得协态的终值为

$$\lambda_1(t_f) = v_1 \qquad \lambda_2(t_f) = v_2 \tag{2-35}$$

$$\lambda_3(t_f) = 0 \qquad \lambda_4(t_f) = v_3 \tag{2-36}$$

积分协态方程(2-33)-(2-34)可得

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\lambda_3 t + c_1 \\
\lambda_2 &= -\lambda_4 t + c_2 \\
\lambda_3 &= \text{常数} = \lambda_3(t_f) = 0 \\
\lambda_4 &= \text{常数} = \lambda_4(t_f) = v_3
\end{aligned}$$

代入协态终值条件后，得

$$c_1 = v_1, \quad c_2 = v_2 + v_3 t_f$$

故

$$\lambda_1 = v_1 \qquad \lambda_2 = v_2 + v_3(t_f - t) \tag{2-37}$$

$$\lambda_3 = v_0 \qquad \lambda_4 = v_3 \tag{2-38}$$

由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial U} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$，得

$$\lambda_1 a \sin\theta - \lambda_2 a \cos\theta = 0$$

即

$$\tan\theta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -v_1 - v_2(t_f - t) \tag{2-39}$$

为了确定最优程序 $\theta(t)$，还需确定拉格朗日未定常数 v_1、v_2。下面来积分状态方程(2-31)，为此将自变量 t 变成 θ。由(2-39)式得

$$\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sec^2\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v_2$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v_2}{\sec^2\theta}$$

将上面关系代入状态方程，即得

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\theta} = a\cos\theta\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{a}{v_2\cos\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\theta} = a\sin\theta\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{a}{v_2}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

积分上面两式得

$$x_1 = \frac{a}{v_2}\ln(\sec\theta + \tan\theta) + c_3$$

$$x_2 = \frac{a}{v_2}\sec\theta + c_3$$

由初始条件

$$x_1(0) = 0$$
$$x_2(0) = 0$$
$$\theta(0) = \theta_0$$

可求得

$$x_1 = \frac{a}{v_2} \ln \frac{\tan\theta + \sec\theta}{\tan\theta_0 + \sec\theta_0} \tag{2-40}$$

$$x_2 = \frac{a}{v_2}(\sec\theta - \sec\theta_0) \tag{2-41}$$

将上面的 x_1 和 x_2 代入状态方程(2-31)的后两式，积分并经较复杂运算得

$$x_3 = \frac{a}{v_2^2}(\sec\theta_0 - \sec\theta + \tan\theta \ln \frac{\tan\theta + \sec\theta}{\tan\theta_0 + \sec\theta_0}) \tag{2-42}$$

$$\begin{aligned} x_4 =& \frac{a}{2v_2^2}\Big\{(\tan\theta_0 - \tan\theta)\sec\theta_0 \\ & - (\sec\theta_0 - \sec\theta)\tan\theta + \ln \frac{\tan\theta + \sec\theta}{\tan\theta_0 + \sec\theta_0}\Big\} \end{aligned} \tag{2-43}$$

由终端条件 $x_2(t_f) = 0$ 和(2-41)式得 $\sec\theta(t_f) = \sec\theta_0$ 故

$$\theta_f \triangleq \theta(t_f) = 2\pi - \theta_0 \tag{2-44}$$

(注：另一解为 $\theta_f = \theta_0$，但这时由(2-43)式可得出 $x_4(t_f) = 0$ 与给定终端条件 $x_4(t_f) = h_f \neq 0$ 不符，故略去 $\theta_f = 0$ 的解）由(2-39)式得

$$\tan\theta = \tan\theta_0 + v_2 t$$
$$\tan\theta_f = \tan\theta_0 + v_2 t_f$$
$$v_2 t_f = -2\tan\theta_0$$

故

$$v_2 = -2\tan\theta_0 / t_f \tag{2-45}$$

于是

$$\tan\theta = (1 - \frac{2t}{t_f}\tan\theta_0) \tag{2-46}$$

将终端条件 $x(t_f) = U$ 和(2-45)式代入(2-40)式，可得

$$\frac{a t_f}{U} = \frac{\tan\theta_0}{\frac{1}{2}\ln\frac{\sec\theta_0 + \tan\theta_0}{\sec\theta_0 - \tan\theta_0}} = \frac{\tan\theta_0}{\ln\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\theta_0)} \tag{2-47}$$

将终端条件 $x_4(t_f) = h_f$，(2-45)式和(2-47)式代入(2-43)式可得

$$\frac{4ah_f}{U^2} = \frac{\tan\theta_0\sec\theta_0 - \frac{1}{2}\ln\frac{\sec\theta_0+\tan\theta_0}{\sec\theta_0-\tan\theta_0}}{\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\sec\theta_0+\tan\theta_0}{\sec\theta_0-\tan\theta_0}\right]^2} \tag{2-48}$$

现在归纳一下所得的结果：由(2-48)式可确定 θ_0，由(2-47)式确定最短时间 $t_f = t_f^*$，由(2-46)式即可求得最优推力方向角 $\theta(t)$。

由上面的计算可知，对于这样一个比较简单的例子求出解析解也是比较困难的。一般情况下可用数值积分法求解。

小结

1，函数的函数叫做泛函。性能指标 J 是控制作用 $u(t)$ 的函数，故称为性能泛函。和微分类似可引入泛函的变分 δJ。J 取极值的必要条件为 $\delta J = 0$。

2，泛函 $J = \int_{t_0}^{t_f} F[X, \dot{X}, t]\,\mathrm{d}t$（$X$，$\dot{X}$ 为向量）取无约束极值的必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right) \quad \text{（欧拉——拉格朗日方程）}$$

当 $X(t_0)$、$X(t_f)$ 自由时，还有横截条件

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = 0 \quad \text{if } t = t_0 \text{ and } t = t_f$$

3，求解动态系统的最优控制是一个求取有约束条件的泛函极值问题。系统的状态方程就是状态变量要满足的一个约束方程，即

$$f(X, U, t) = \dot{X} = 0$$

4，设系统状态方程为 $\dot{X} = f(X, U, t)$，性能指标为 $J = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t)dt$，初始状态 $X(t_0)$ 给定，终端状态 $X(t_f)$ 满足向量约束方程 $G[X(t_f), t_f] = 0$，（包括 $X(t_f)$ 给定的情况）。则由变分法可得下面的结果：

（1）终端时刻 t_f 给定时，J 取极值的必要条件为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad （协态方程）$$

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad （状态方程）$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \quad （控制方程）$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial \Psi^T}{\partial X(t_f)}\gamma \quad （横截方程）$$

其中，$H(X,U,\lambda,t)=F(X,U,t)+\lambda^T f(X,U,t)$ 称为哈密顿函数。
正则方程有 $2n$ 个变量，积分时要 $2n$ 个边界条件，初始条件 $X(t_0)$ 给定时提供了 n 个边界条件，若 $X(t_f)$ 也完全给定则又提供了 n 个边界条件，这时可不需要横截条件，见例 2-3。
当 $X(t_f)$ 自由或部分分量自由就要靠横截条件来提供缺少的边界条件，见例 2-4。
(2) 终端条件 t_f 自由，J 取极值的必要条件与 t_f 给定时的不同处，仅在于多一个求最优终端时刻的条件

$$H(t_f)=-\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}-\frac{\partial\Psi}{\partial t_f}\gamma \tag{2-49}$$

5，用经典变分法求解最优控制时，假定 $u(t)$ 不受限制，δU 为任意，故得出控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial U}=0$$

不满足这种情况时，要用极小值原理或动态规划求解。这些内容在下面的章节中介绍。