

最优控制理论与系统

第一章 绪论

张永韡

江苏科技大学
电子信息学院

yongwzhang@gmail.com

2016 年 9 月 28 日



Before we start...

成绩构成

- 1 总评成绩 = 考试成绩 $\times 0.7$ + 平时成绩 $\times 0.3$
- 2 平时成绩 = 考勤成绩 $\times \frac{1}{3}$ + 作业成绩 $\times \frac{1}{3}$ + 试讲成绩 $\times \frac{1}{3}$
- 3 考勤成绩 = 实际出勤/考勤次数 $\times 100$
- 4 作业成绩：按时上交依完成情况评分，迟交记及格，未交 0 分。作业格式不满足要求的，按不满足的数量依次降低评价，直至及格。最终作业成绩为作业的平均分。
- 5 试讲成绩：学期中会分组安排同学上台讲述一段课程内容，小组其他学生成绩为试讲同学成绩降低一等。



作业要求

- ① 手写或电子稿均可。手写作业应使用扫描软件转换为黑白模式，并导出为一个 pdf 文档（直接合并多张图片为 pdf 文档即可，不建议将图片拷贝至电子文档中再转换为 pdf）。电子版同样应转换为 pdf 文档。
- ② 作业应在第一页上方标注作业序号，如“最优控制第 1 次作业”，姓名及学号。电子文档可附手写签名（如果知道怎么弄的话）。
- ③ 电子版作业正文应使用小四号字，宋体，使用公式编辑器输入公式。注意公式字号应与正文保持一致。
- ④ 在有需绘制图形的作业中，允许手绘图形与电子文稿混排，但手绘图形必须先转换为黑白图像。
- ⑤ 作业文件应命名为“最优控制第 X 次 + 学号 + 姓名”的形式，如“最优控制第 1 次 142030030 申兆丰”。并将邮件作为附件，发送至邮箱 yongwzhang@gmail.com。注意邮件标题应与附件名一致。不接受网易，163 等超大附件（因为有时效性），请注意压缩文档的大小。
- ⑥ 作业截止时间为布置作业后下一次课前一天下午 6:00。



关于邮箱的一些建议

- ❶ 不要使用纯数字的邮箱名称。尽量使用可以代表自己姓名的字母组合。如姓名被占用，可在后方添加自己的单位缩写等。
- ❷ 邮箱设置中应该将默认的名称（一般是昵称）改为自己的姓名，方便收信人确定发信方身份。
- ❸ 工作邮箱可以设置签名，其中包含自己的单位，职务，联系方式等（可选）。
- ❹ 邮件标题应能够概括一封邮件的主要意思。如“某学校/公司某某申请某职位”，而不要写成简单的“求职”。
- ❺ 邮件有附件的，应在信件最后介绍附件的内容。附件的名称也应该能够概括其主要内容。
- ❻ 如附件内容较简单的，可以纯文本的形式给出附件内容或内容的总结。收件人可以直观了解附件信息，并选择在有需要的时候下载附件。



最优控制简介

基本内涵

在生产过程、军事行动、经济活动以及人类的其它有目的的活动中，常需要对被控系统或被控过程施加某种控制作用以使某个性能指标达到最优，这种控制作用称为最优控制。

主要问题

建立模型，选择控制率，使被控对象按要求运行，并使给定的性能指标达到最优。



最优控制发展过程

- 上世纪五十年代初期布绍 (Bushaw) 研究了伺服系统的时间最优控制问题。
- 拉塞尔 (LaSalle) 发展了时间最优控制的理论, 即所谓 Bang—Bang 控制理论。
- 1953 至 1957 年间美国学者贝尔曼 (Bellman) 创立了“**动态规划**”理论, 发展了变分学中的哈密顿—雅可比 (Hamilton—Jacobi) 理论。
- 1956 至 1958 年间苏联学者庞特里雅金等创立了“**极大值原理**”。这两种方法成为了目前最优控制理论的两个柱石。
- 随着计算机技术的发展和性能指标的日益复杂, 数值计算方法得以应用。

时至今日, 最优控制理论的研究无论在深度上和广度上都有了很大的发展, 例如发展了对分布参数系统、随机系统、大系统的最优控制理论的研究等等。



最速降线问题

例 1

“一个质点在重力作用下，从一个给定点到不在它垂直下方的另一点，如果不计摩擦力，问沿着什么曲线滑下所需时间最短。”

—伽利略，1630

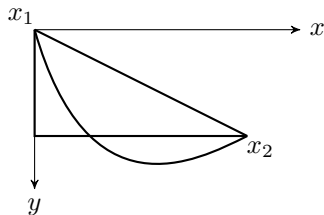


图 1-1: 最速降线问题



最速降线问题

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v}$$

$$T = \int dt = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \int \frac{\sqrt{1 + (dx/dy)^2}}{\sqrt{2gy}} dy$$
$$\stackrel{y' = dx/dy}{=} \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dy$$



火车快速运行问题

例 2

设有一列火车从甲地出发，要求算出容许的控制使其到达乙地的时间最短。

火车的运动方程

$$m\ddot{x} = u(t) \quad (1-1)$$

式中， m 是火车的质量， $\ddot{x}$ 是火车的加速度，为使旅客舒适，其值有限制。 $u(t)$ 是产生加速度的控制作用（即推力），其值也应有限制，设

$$|u(t)| \leq M \quad (1-2)$$



火车快速运行问题

初始条件

$$x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = 0 \quad (1-3)$$

终端条件

$$x(t_f) = x_f \quad \dot{x}(t_f) = 0 \quad (1-4)$$

性能指标

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (1-5)$$

选择 $u(t)$, 使 $J(u)$ 最小。



月球软着陆问题

例 3

为了使宇宙飞船在月球表面上实现软着陆 (即着陆时速度要为零), 要寻求着陆过程中发动机推力的最优控制规律, 使得燃料的消耗最少。设飞船的质量为 $m(t)$, 离月球表面的高度为 $h(t)$, 飞船的垂直速度为 $v(t)$, 发动机推力为 $u(t)$, 月球表面的重力加速度为 g , 设不带燃料的飞船质量为 M , 初始燃料的质量为 F , 则飞船的运动方程可表示为 (参见图1-2)

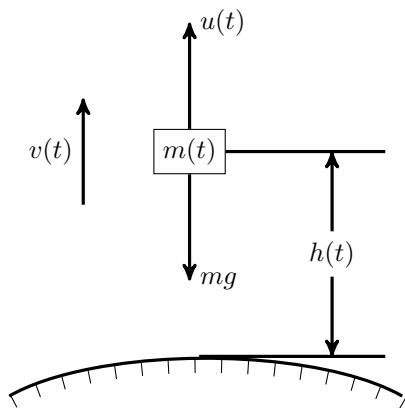


图 1-2: 月球软着陆最优控制问题



月球软着陆问题

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -g + \frac{u(t)}{m(t)} \\ \dot{m}(t) &= -ku(t)\end{aligned}\tag{1-6}$$

式中 k 为比例系数，表示了推力与燃料消耗率的关系。



月球软着陆问题

初始条件

$$h(t_0) = h_0 \quad v(t_0) = v_0 \quad m(t_0) = M + F \quad (1-7)$$

终端条件

$$h(t_f) = 0 \quad V(t_f) = 0 \quad (1-8)$$

容许控制

$$0 \leq u(t) \leq a \quad (1-9)$$

控制目的是使燃料消耗量最小，即飞船在着陆时的质量保持最大，即

$$J(u) = m(t_f) \quad (1-10)$$

为最大。



生产计划问题

例 4

生产计划问题。设 $x(t)$ 表示商品存货量， $r(t) \geq 0$ 表示对商品的需求率，是已知函数。 $u(t)$ 表示生产率，它将由计划人员来选取，故是控制变量。 $x(t)$ 满足下面的微分方程

$$\dot{x}(t) = -r(t) + u(t) \quad t \in [0, t_f] \quad (1-11)$$

$$x(0) = x_0 \quad (1-12)$$

x_0 是初始时刻的商品存货量，且 $x_0 \geq 0$ 。从 $x(t)$ 的实际意义来看，显然必须选取生产率使得

$$x(t) \geq 0 \quad t \in [0, t_f] \quad (1-13)$$

其次，生产能力应该有限制，即容许控制为

$$0 \leq u(t) \leq A \quad t \in [0, t_f]$$



生产计划问题

这里 $A > 0$ 表示最大生产率，另外为了保证满足需求，必须有

$$A > r(t) \quad t \in [0, t_f] \quad (1-14)$$

假定每单位时间的生产成本是生产率 $u(t)$ 的函数，即 $h[u(t)]$ 。设 $b > 0$ 是单位时间储存单位商品的费用，于是，单位时间的总成本为

$$f[x(t), u(t), t] = h[u(t)] + bx(t) \quad (1-15)$$

由 $t = 0$ 到 $t = t_f$ 的总成本为

$$J(u) = \int_0^{t_f} f[x(t), u(t), t] dt \quad (1-16)$$

要求寻找最优控制 $u^*(t)$ ，使总成本 J 最小。



小结

由上面的例子可见，求解最优控制问题时要给定系统的状态方程，状态变量所满足的初始条件和终端条件，性能指标的形式（时间最短、消耗燃料最小，误差平方积分最小等）以及控制作用的容许范围等。

用数学语言来比较详细地表达最优控制问题的内容：建立被控系统的状态方程

$$\dot{X} = f[X(t), U(t), t] \quad (1-17)$$

其中， $X(t)$ 为 n 维状态向量， $U(t)$ 为 m 维控制向量， $f[X(t), U(t), t]$ 为 n 维向量函数，它可以是非线性时变向量函数，也可以是线性定常的向量函数。状态方程必须精确的知道。

一个动态过程对应于 n 维状态空间中从一个状态到另一个状态的转移，也就是状态空间中的一条轨线。在最优控制中初态通常是知道的，即

$$X(t_0) = X_0 \quad (1-18)$$

而到达终端的时刻 t_f 和状态 $X(t_f)$ 则因问题而异。



建立被控系统的状态方程

例如，在流水线生产过程中， t_f 是固定的；在飞机快速爬高时，只规定爬高的高度 $X(t_f) = X_f$ ，而 t_f 是自由的，要求 $t_f - t_0$ 越小越好。终端状态 $X(t_f)$ 一般属于一个目标集 S ，即

$$X(t_f) = X_f \quad (1-19)$$

当终端状态是固定的，即 $X(t_f) = X_f$ 时，则目标集退化为 n 维状态空间中的一个点。而当终态满足某些约束条件，即

$$G[X(t_f), t_f] = 0 \quad (1-20)$$

这时 $X(t_f)$ 处在 n 维状态空间中某个超曲面上。若终态不受约束，则目标集便扩展到整个 n 维空间，或称终端状态自由。



选定性能指标

性能指标一般有下列的形式：

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[X(t), U(t), t] dt \quad (1-21)$$

上述性能指标包括两个部分，即积分指标 $\int_{t_0}^{t_f} L[X(t), U(t), t] dt$ 和终端指标 $\phi[X(t_f), t_f]$ ，这种综合性指标所对应的最优控制问题称为**波尔扎 (Bolza)** 问题。当只有终端指标时，称为**迈耶尔 (Mayer)** 问题；当只有积分指标时，称为**拉格朗日 (Lagrange)** 问题。

性能指标的确定因问题的性质而异。在导弹截击目标的问题中，我们要求弹着点的散布度最小，这时可用终端指标来表示。在快速控制问题时，要求系统从一个状态过渡到另一个状态的时间最短，即 $\int_{t_0}^{t_f} dt \rightarrow \min$ ，这就是积分指标。

性能指标 J 是控制作用 $U(t)$ 的函数，也就是函数 $U(t)$ 的函数，这种以函数为自变量的函数称为泛函，所以 J 又称为性能泛函。有的文献中也把性能指标称为代价函数、目标函数等等。



确定控制作用的容许范围 Ω

确定控制作用的容许范围 Ω ，即

$$U(t) \in \Omega \quad (1-22)$$

Ω 是 m 维控制空间 R^m 中的一个集合。例如，控制飞机的舵偏角是受限制的，控制电机的电流是受限制的，即有 $|U(t)| \leq M$ 。这时控制作用属于一个闭集。当 $U(t)$ 不受任何限制时，称它属于一个开集。下面将看到处理这两类问题的方法是不同的。 Ω 可称为容许集合，属于 Ω 的控制则称为容许控制。按一定的方法计算出容许控制 $U(t)$, ($U(t) \in \Omega$)，将它施加于用状态方程描述的系统，使状态从初态 $X(t_0)$ 转移到目标集 S 中的某一个终态 $X(t_f)$ ，并使性能指标达到最大或最小，即达到某种意义下的最优。



本课程主要内容

课程将介绍求解最优控制问题的方法：

- 1 经典变分法
- 2 极大（小）值原理
- 3 动态规划法
- 4 线性二次型最优控制（系统为线性，指标为状态和控制的二次型）
- 5 线性二次型高斯控制（系统为线性且有高斯噪声，指标为二次型）
- 6 最优鲁棒控制