

# 最优控制理论与系统

## 第三章 极小值原理及其应用

张永韡

江苏科技大学  
电子信息学院  
yongwzhang@gmail.com

November 9, 2016



# 本章主要内容

- 经典变分法的局限性
- 连续系统的极小值原理
- 最短时间控制问题
- 最少燃料控制问题
- 离散系统的极小值原理
- 小结



# 经典变分法的局限性

上面我们用经典变分法解最优控制问题时，得出了最优性的必要条件

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0$$

在得出这个条件时，作了下面的假定：

- 1  $\delta U$  是任意的，即不受限制，它遍及整个向量空间，是一个开集；
- 2  $\frac{\partial H}{\partial U}$  是存在的。

在实际工程问题中，控制作用常常是有界的。如飞机舵面的偏角有限制，火箭的推力有限制，生产过程中的生产能力有限制等等。一般，我们可用下面的不等式来表示

$$|u_i(t)| \leq M_i \quad i = 1, \dots, m$$

这时  $U(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$  属于一个有界的闭集，写成  $U(t) \in \Omega$ ， $\Omega$  为闭集。更一般的情况可用下面的不等式约束来表示。

$$g[U(t), t] \geq 0$$

当  $U(t)$  属于有界闭集， $U(t)$  在边界上取值时， $\delta U$  就不是任意的了，因为无法向边界外取值，这时  $\frac{\partial H}{\partial U}$  就不一定是最优解的必要条件。

考察由图3-1所表示的几种情况，图中横轴上每一点都表示一个标量控制函数  $u$ ，其容许取值范围为  $\Omega$ 。

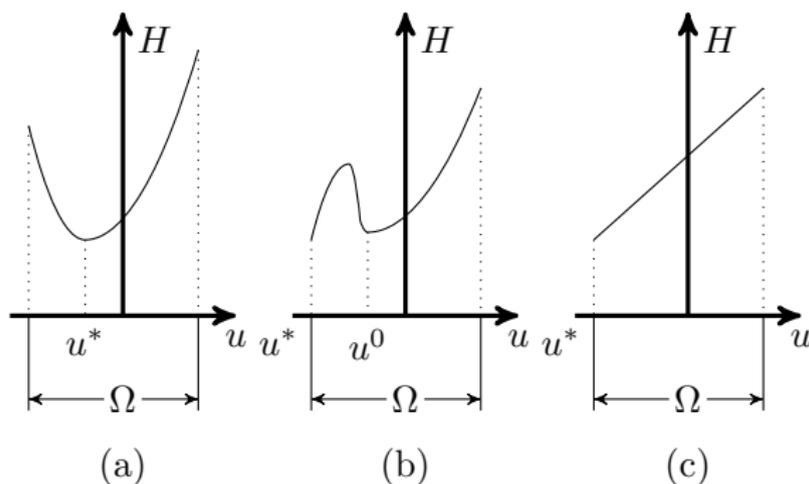


图 3-1: 有界闭集内函数的几种形状

对于图3-1(a),  $\partial H/\partial u = 0$  仍对应最优解  $u^*$ 。对于图3-1(b),  $\partial H/\partial u = 0$  所对应的解  $u^0$  不是最优解, 最优解  $u^*$  在边界上。对于图3-1(c),  $\partial H/\partial u \equiv \text{常数}$ , 由这个方程解不出最优控制  $u$  来 (这种情况称为奇异情况), 最优解  $u^*$  在边界上。

另外， $\partial H/\partial u$  也不一定是存在的。例如状态方程的右端  $f(X, U, t)$  对  $U$  的一阶偏导数可能不连续，或由于有些指标函数，如燃料最优控制问题中，具有下面的形式

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t) dt = \int_{t_0}^{t_f} |U| dt$$

这时  $H(X, U, \lambda, t) = F(X, U, t) + \lambda^T f(X, U, t)$  对  $U$  的一阶偏导数不连续。

- 经典变分法无法处理上面的情况，必须另辟新的途径。
- 极小值原理就是解决这类问题的有力工具。用极小值原理求解控制无约束的最优控制问题和古典变分法是**完全一样**的。
- 1956年前苏联学者庞特里雅金提出这个原理时，把它称为极大值原理，目前较多地采用极小值原理这个名字。

下面给出这个原理及其证明，并举例说明其应用。



# 连续系统的极小值原理

由于可以利用扩充变量的方法将各类最优控制问题化为定常系统，末值型性能指标情况下的标准形式。我们这里只就定常系统、末值型性能指标、 $t_f$  固定、末端受约束情况下给出极小值原理的简单证明。  
设系统的状态方程为

$$\dot{X} = f(X, U, t) \quad X(t) \in R^n \quad (3-1)$$

初始条件为

$$X(t_0) = X_0 \quad (3-2)$$

控制向量  $U(t) \in R^m$ ，并受下面的约束

$$U \in \Omega \quad (3-3)$$

末值状态必须满足的约束条件为

$$G[X(t_f), t_f] = 0 \quad (3-4)$$



# 连续系统的极小值原理

性能指标函数为

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + v^T G[X(t_f), t_f] \quad (3-5)$$

其中  $v \in R^n$  为待定列向量。

在本节中，假设函数  $f_i(X, U, t)$ ,  $\frac{\partial f_i}{\partial X}$ ,  $\phi[X(t_f), t_f]$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)}$  存在且连续，并假定容许控制  $U(t)$  是在控制域内取值的任何分段连续函数。这时如果选定了某一容许控制  $U(t)$ ，则容易证明在任意的初始条件  $X(t_0) = X_0$  下，方程(3-1)唯一的确定了系统状态的变化规律  $X(t)$ ，且  $X(t)$  是连续的和分段可微的。在这些条件下，我们就定常系统、末值型性能指标、 $t_f$  固定、末端受约束情况下给出极小值原理的简单证明。



# 极小值原理的证明

## 证明：

采用扰动法，即给最优控制一个变分  $\delta U$ ，它将引起最优轨线的变分  $\delta X$ ，并使性能指标有一增量  $\Delta J$ ，当  $J$  为极小时，必有  $\Delta J \geq 0$ ，由此即可导出最优控制所应满足的必要条件。在变分法中， $\delta U$  是微量，即将最优控制和邻近的容许控制相比较，因而最多只能建立哈密顿函数  $H$  的相对极小值性质。

庞特里亚金极大值原理却将最优控制与控制域内所有可能的值进行比较，因而得出结论，在整个控制域内最优控制使哈密顿函数  $H$  成为绝对极小值。正是这个性质使得庞特里亚金极大值原理成为寻找最优控制的有力工具。但是这样， $U(t)$  的改变量  $\delta U$  必须看成有限量，而不再是微量。如果让改变的时间很短，则由此引起的最优轨线的改变  $\delta X$  仍是微量，性能指标的增量  $\Delta J$  也是微量，因而对各关系式的数学处理仍是比较容易的。

设  $U^*(t)$  为最优控制, 任选一时刻  $t_1 \in [t_0, t_f]$  及一微量  $\epsilon > 0$ , 在时间间隔中  $[t_1 - \epsilon, t_1]$  给  $U^*(t)$  一有限大小的改变量  $\delta U$ , 且使得  $U^* + \delta U \in \Omega$ 。现在研究由  $\delta U$  引起的最优轨线  $X^*(t)$  的变化。分为三段考虑:

1,  $0 \leq t \leq t_1 - \epsilon$

在这一段中,  $\delta U = 0$ , 因而  $\delta X(t) = 0$ 。

2,  $t_1 - \epsilon \leq t \leq t_1$

系统的状态方程(3-1)可在初始条件  $X(t_1 - \epsilon) = X^*(t_1 - \epsilon)$  下直接积分。

当  $U = U^*$  时,

$$X^*(t) - X^*(t_1 - \epsilon) = \int_{t_1 - \epsilon}^t f(X^*, U^*, t) dt$$

当  $U = U^* + \delta U$  时,

$$X(t) - X^*(t_1 - \epsilon) = \int_{t_1 - \epsilon}^t f(X, U^* + \delta U, t) dt$$

两式相减可得这一段的  $\delta X(t)$

$$\delta X(t) = \int_{t_1-\epsilon}^t [f(X, U^* + \delta U, t) - f(X^*, U^*, t)] dt \quad (3-6)$$

可以对  $\delta X(t)$  的大小作估计

$$|\delta X(t)| \leq \max_{t_1-\epsilon \leq t \leq t_1} |f(X, U^* + \delta U, t) - f(X^*, U^*, t)|(t - t_1 + \epsilon)$$

由于  $\epsilon$  是微量，所以  $\delta X(t)$  也是微量，因而在精确到一阶微量的情况下，下式成立

$$f(X, U^* + \delta U) = f(X^*, U^* + \delta U) + \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X=X^*} \delta X \quad (3-7)$$

将式(3-7)代入(3-6)，并注意到微量  $\delta X$  在微小时间间隔上的积分是高阶微量，即得

$$\delta X(t) = \int_{t_1-\epsilon}^t [f(X^*, U^* + \delta U, t) - f(X^*, U^*, t)] dt$$

在第二段时间间隔的终点  $t = t_1$ , 则有

$$\delta X(t_1) = \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} [f(X^*, U^* + \delta U, t) - f(X^*, U^*, t)] dt$$

或

$$\delta X(t_1) = [f(X^*, U^* + \delta U, t) - f(X^*, U^*, t)]|_{t=t_1} \epsilon + o(\epsilon) \quad (3-8)$$

其中  $o(\epsilon)$  表示二阶以上的微量。

3,  $t_1 \leq t \leq t_f$

这时又有  $U = U^*$ , 系统的状态方程为

$$\dot{X} = f(X, U^*, t)$$

而状态变量  $\delta X(t)$  的变分满足方程

$$\delta \dot{X} = \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{U=U^*} \delta X \quad (3-9)$$

引入变量  $\lambda^*(t)$  及哈密顿函数  $H$

$$H(X, U^*, \lambda^*, t) = \lambda^{*T} f(X, U^*, t) \quad (3-10)$$

$$\dot{\lambda}^* = - \left. \frac{\partial H}{\partial X} \right|_{\substack{U=U^* \\ \lambda=\lambda^*}} = - \left. \left( \frac{\partial f^T}{\partial X} \right) \right|_{U=U^*} \lambda^* \quad (3-11)$$

$$\lambda^*(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} \nu \quad (3-12)$$

显然，方程(3-9)和(3-11)为共轭方程，立即求得积分

$$\lambda^{*T}(t) \delta X(t) = C$$

为常数，或

$$\lambda^{*T}(t_f) \delta X(t_f) = \lambda^{*T}(t_1) \delta X(t_1) \quad (3-13)$$

即最终求得了由于  $\delta U$  的有限改变而引起的最优轨线的变化  $\delta X(t)$ ，特别是末值状态的变化  $\delta X(t_f)$ 。

下面研究由  $\delta U$  引起的最优性能指标的改变量  $\Delta J$ 。由于

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + \nu^T G[X(t_f), t_f]$$

故有

$$\Delta J = \left( \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} \nu \right)^T \delta X(t_f) + o(\epsilon) \quad (3-14)$$

综合(3-8)、(3-12)、(3-13)和(3-14)等式，可以建立  $\Delta J$  与有限改变量  $\delta U$  之间的关系

$$\Delta J = [\lambda^{*T} f(X^*, U^* + \delta U, t) - \lambda^{*T} f(x^*, U^*, t)]|_{t=t_1} \epsilon + o(\epsilon) \geq 0$$

已知  $t_1 \in [t_0, t_f]$  中的任意时刻，并以  $U$  表示  $U^* + \delta U$ ，当  $\epsilon \rightarrow 0$  时，上式变为

$$\lambda^{*T} f(X^*, U^*, t) \leq \lambda^{*T} f(X^*, U, t), \quad U \in \Omega, \quad t \in [t_0, t_f]$$

或用哈密顿函数  $H$  的表达式(3-10)表示可得

$$H(X^*, \lambda^*, U^*, t) \leq \min_{U \in \Omega} H(X^*, \lambda^*, U, t) \quad (3-15)$$

或

$$\min_{U \in \Omega} H(X^*, \lambda^*, U, t) = H(X^*, \lambda^*, U^*, t)$$

于是定常系统、末值型性能指标、 $t_f$  固定、末端受约束情况下极小值原理得以证明。



# 极小值原理的表达

总结上述讨论，可将庞特里雅金极小值原理写为如下形式：

## 定理（极小值原理）：

系统的状态方程为

$$\dot{X} = f(X, U, t) \quad X(t) \in R^n$$

初始条件为

$$X(t_0) = X_0$$

控制向量  $U(t) \in R^m$ ，并受下面的约束

$$U \in \Omega$$

终端约束

$$G[X(t_f), t_f] = 0$$



# 极小值原理的表达

性能指标函数为

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t) dt$$

要求选择最优控制  $U^*$ , 使  $J$  取极小值。 $J$  取极小值的必要条件是  $X(t)$ 、 $U(t)$ 、 $\lambda$  和  $t_f$  满足下面的一组方程

1 正则方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad (\text{协态方程}) \quad (3-16)$$

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (\text{状态方程}) \quad (3-17)$$

2 边界条件

$$X(t_0) = X_0 \quad G[X(t_f), t_f] = 0 \quad (3-18)$$

3 横截条件

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} \nu \quad (3-19)$$



## 极小值原理的表达

4 哈密顿函数沿最优轨线保持为常数。

$$H(X^*, \lambda, U^*, t) = C \quad (3-20)$$

5 在最优轨线  $X^*(t)$  和最优控制  $U^*(t)$  上哈密顿函数取极小值

$$\min_{U \in \Omega} H(X^*, \lambda^*, U, t) = H(X^*, \lambda^*, U^*, t) \quad (3-21)$$

以上条件与教材 50 页定理 3-1 不完全相同，原因在于性能指标定义不同将上面的结果与用古典变分法所得的结果对比可见，只是将  $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$  这个条件用(3-21)代替，其它无变化。

应该指出，当  $\frac{\partial H}{\partial U}$  存在，且  $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$  得出的  $H$  绝对极小，如图3-1(a)所示时， $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$  即为条件(3-21)式。所以极小值原理可以解决变分法所能解决的问题，还能解决变分法不能解决的问题。如何应用条件(3-21)式，这是一个关键，我们将用具体例子来说明。



# 最短时间控制问题

节省时间意味着提高生产率或先发制人取得军事行动的胜利。所以人们很早就开始了对最短时间控制的研究，这方面的研究结果很多，这里先就简单的重积分系统的最短时间控制展开讨论。

在前面的绪论中列举了火车快速行驶问题。设火车质量  $m = 1$ ，把运动方程写成状态方程形式，令  $x_1 = x$ ， $x_2 = \dot{x}$  可化为下面的最短时间控制问题。



# 重积分系统的最短时间控制

## 例 3-1

状态方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}\quad (3-22)$$

初始条件为

$$x_1(t_0) = x_{10} \quad x_2(t_0) = x_{20} \quad (3-23)$$

终端条件为

$$x_1(t_f) = 0 \quad x_2(t_f) = 0 \quad (3-24)$$

控制约束为

$$|u(t)| \leq 1 \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (3-25)$$

求出使性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (3-26)$$

取极小的最优控制。

解：因为控制作用有限制（属于有界闭集），故要用极小值原理求解。取哈密顿函数

$$H = F + \lambda^T f = 1 + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t) \quad (3-27)$$

协态方程为

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad (3-28)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \quad (3-29)$$

积分上面两个方程可得

$$\lambda_1(t) = c_1 \quad (3-30)$$

$$\lambda_2(t) = c_2 - c_1 t \quad (3-31)$$

其中， $c_1$ 、 $c_2$  是积分常数。

由  $H$  的表达式(3-27)可见, 若要选择  $u(t)$  使  $H$  取极小, 只要使  $\lambda_2(t)u(t)$  越负越好, 而  $|u(t)| \leq 1$ , 故当  $|u(t)| = 1$ , 且  $u(t)$  与  $\lambda_2(t)$  反号时,  $H$  取极小, 即最优控制为

$$u(t) = -\operatorname{sgn}[\lambda_2(t)] = \begin{cases} 1, & \lambda_2(t) < 0 \\ -1, & \lambda_2(t) > 0 \end{cases}$$

由此可见, 最优解  $u(t)$  取边界值  $+1$  或  $-1$ , 是开关函数的形式。什么时候发生开关转换, 将取决于  $\lambda_2(t)$  的符号。而由(3-31)式可见,  $\lambda_2(t)$  是  $t$  的线性函数, 它有四种可能的形状 (见图3-2),  $u(t)$  也相应地有四种序列

$$\{+1\}, \quad \{-1\}, \quad \{+1, -1\}, \quad \{-1, +1\}$$

由图3-2可见，当  $\lambda_2(t)$  为  $t$  的线性函数时  $u(t)$  最多改变一次符号。

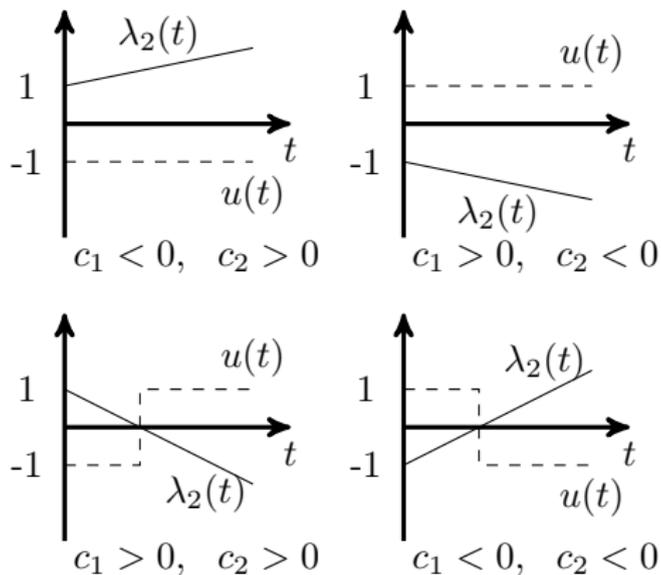


图 3-2:  $u(t)$  与  $\lambda_2(t)$  的四种形状

下面来求出  $u(t)$  取不同值时的状态轨迹（也称为相轨迹）。  
当  $u(t) = +1$  时，状态方程的解为

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t + x_{20} \\ x_1(t) &= \frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10} \end{aligned} \quad (3-32)$$

从上面两式消去  $t$ ，即可得相轨迹方程

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) + c \quad (3-33)$$

在图3-3中用实线表示，不同的  $c$  值可给出一簇曲线。由(3-32)第一式知  $t$  增大时  $x_2(t)$  增大，故相轨迹进行方向是自下而上，如图中曲线上箭头所示。

当  $u = -1$  时，状态方程的解为

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -t + x_{20} \\ x_1(t) &= -\frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10} \end{aligned} \quad (3-34)$$

消去  $t$ , 可得相轨迹方程

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + c' \quad (3-35)$$

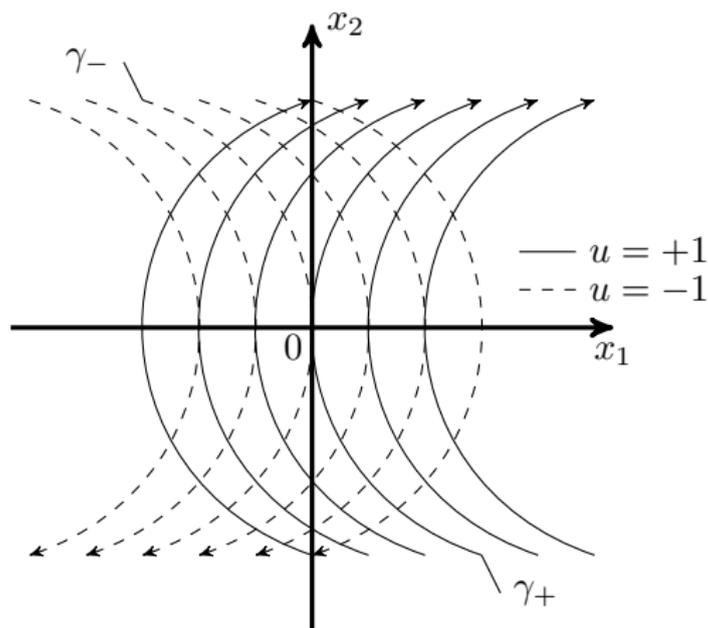


图 3-3: 相轨迹图

在图3-3中用虚线表示。因  $t$  增大时,  $x_2(t)$  减少, 故相轨迹进行方向是自上而下。

两簇曲线中, 每一簇中有一条曲线的半支进入原点。在  $u = +1$  的曲线簇中, 通过原点的曲线方程为

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) \quad x_2(t) \leq 0 \quad (3-36)$$

这半支用  $\gamma_+$  表示。在  $u = -1$  的曲线簇中, 通过原点的曲线方程为

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) \quad x_2(t) \leq 0 \quad (3-37)$$

这半支用  $\gamma_-$  表示。

$\gamma_+$  和  $\gamma_-$  这两个半支通过原点的抛物线称为开关线, 其方程为

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)| \quad (3-38)$$

当初始状态  $(x_{10}, x_{20})$  在开关线左侧，如图3-4中  $D$  点，从  $D$  点转移到原点，并在转移过程中只允许  $u$  改变一次符号的唯一途径如图所示，即从  $D$  点沿  $u = +1$  的抛物线移到与  $\gamma_-$  相遇，在相遇点改变  $u$  的符号为  $u = -1$ ，再沿  $\gamma_-$  到达原点。因此，只要初始状态在开关线左侧，都沿  $u = +1$  的抛物线转移到  $\gamma_-$ ，然后  $u$  改变符号为  $u = -1$ ，并沿  $\gamma_-$  到达原点。同样，当初始状态在开关线右侧，如图3-4中的  $M$  点，则先沿  $u = -1$  的抛物线转移到  $\gamma_+$ ，然后  $u$  改变符号为  $u = +1$ ，并沿  $\gamma_+$  到达原点。

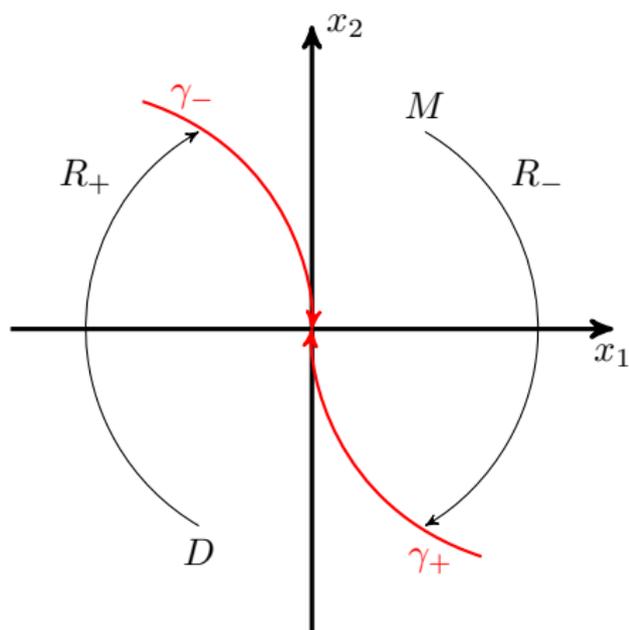


图 3-4: 最优相轨迹与开关线

在图3-4中开关曲线（由  $\gamma_-$  和  $\gamma_+$  组成）把  $x_1 - x_2$  平面划成两个区域。开关线左侧（图中划阴影线部分）区域用  $R_+$  表示， $R_+$  中的点满足

$$x_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2| \quad u = +1 \quad (3-39)$$

开关线右侧区域用  $R_-$  表示， $R_-$  中的点满足

$$x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2| \quad u = -1 \quad (3-40)$$

于是最优控制规律可表示为状态  $x = (x_1, x_2)^T$  的函数，即

$$u^*(x_1, x_2) = +1 \quad \text{if } x \in \gamma_+ \text{ and } x \in R_+ \quad (3-41)$$

$$u^*(x_1, x_2) = -1 \quad \text{if } x \in \gamma_- \text{ and } x \in R_- \quad (3-42)$$

根据上面的关系， $u^*$  可以通过非线性的状态反馈来构成。

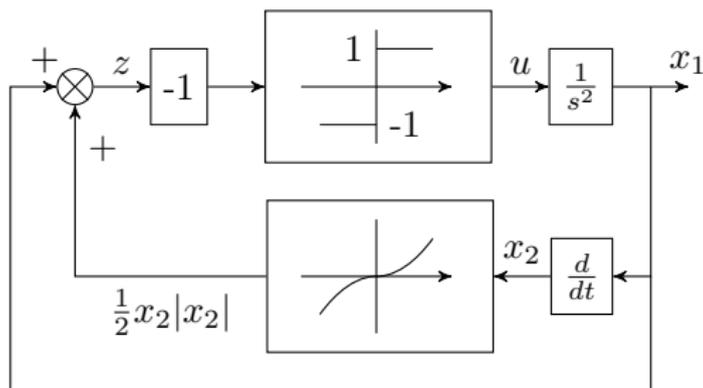


图 3-5: 重积分系统时间最优控制的框图

图3-5表示了重积分系统时间最优控制的工程实现。由图可见

$$Z = x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2|$$

$Z < 0$  时,  $u = 1$ , 即满足(3-39)式,  $Z > 0$  时,  $u = -1$ , 即满足(3-40)式。图中的继电函数早期是用继电器实现的, 由于继电器在动作时有砰砰声, 故这种最优控制又称为“砰砰”控制。当然, 现在可以用无接触的电子开关或微处理机来实现这种控制规律, 既方便、可靠, 又无砰砰声。



# 积分环节和惯性环节串联系统的最短时间控制

## 例 3-2

### 积分环节和惯性环节串联系统的最短时间控制

其传递函数为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+a)} \quad (3-43)$$

其中  $a$  为大于零的实数。由(3-43)式可得运动方程为

$$\ddot{y} + a\dot{y} = u \quad (3-44)$$

令  $x_1$  和  $x_2$  为状态变量，并有

$$\begin{aligned} x_1 &= y, & x_2 &= \dot{y} \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + u \end{aligned} \quad (3-45)$$

控制约束为  $|u(t)| \leq 1$ ，最优控制只能取  $\pm 1$ 。

(1) 对于  $u = +1$  情形, 状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -ax_2 + 1$$

其状态相轨迹为

$$x_1 = -\frac{x_2}{a} - \frac{1}{a^2} \ln |1 - ax_2| + C \quad (3-46)$$

如图3-6(a)所示, 箭头为状态运动方向。它有一条渐近线  $x_2 = 1/a$ , 如图中虚线所示。在这簇曲线中, 只有  $\gamma_+$  到达平衡位置 0。

$$\gamma_+ : \quad x_1 = -\frac{x_2}{a} - \frac{1}{a^2} \ln |1 - ax_2|, \quad x_2 \leq 0 \quad (3-47)$$

(2) 对于  $u = -1$  的情形，状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -ax_2 - 1$$

其状态轨线相迹为

$$x_1 = -\frac{x_2}{a} + \frac{1}{a^2} \ln |1 + ax_2| + C \quad (3-48)$$

如图3-6(b)所示，箭头为状态运动方向。它有一条渐近线  $x_2 = -1/a$ ，如图中虚线所示。在这簇曲线中，只有  $\gamma_-$  到达平衡位置 0。

$$\gamma_- : \quad x_1 = -\frac{x_2}{a} + \frac{1}{a^2} \ln |1 + ax_2|, \quad x_2 \geq 0 \quad (3-49)$$

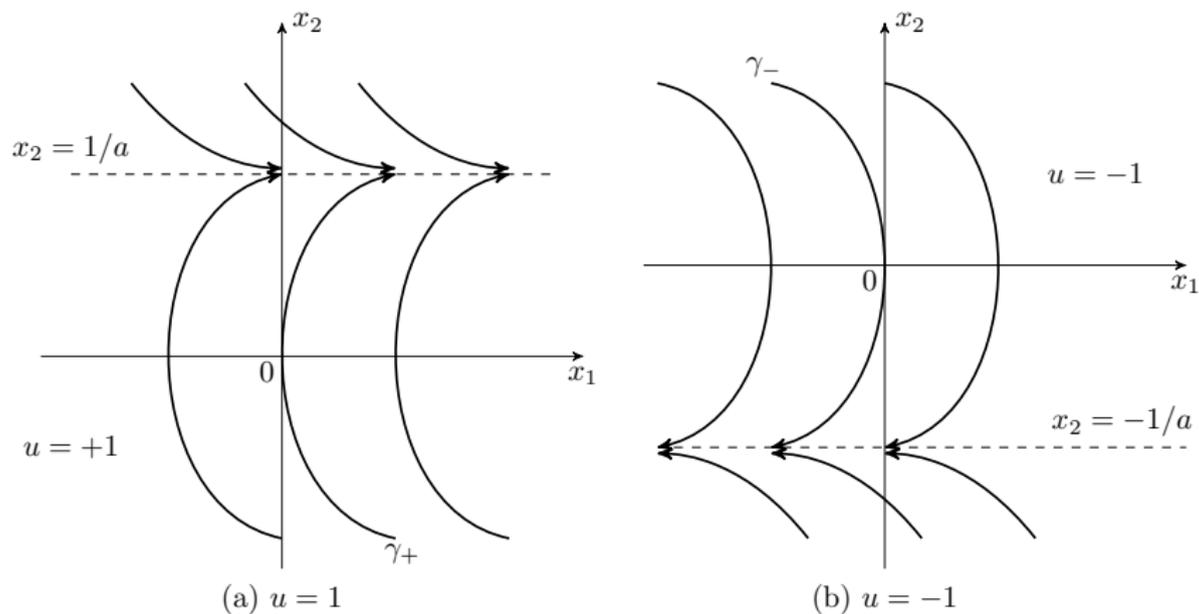


图 3-6:  $\frac{1}{s(s+a)}$  系统的相轨迹

将  $\gamma_+$  和  $\gamma_-$  合并成一条曲线, 其方程为

$$\gamma: x_1 = -\frac{x_2}{a} + \frac{1}{a^2} \operatorname{sgn}(x_2) \ln |1 + a|x_2|| \quad (3-50)$$

令

$$F(x_2) = -\frac{x_2}{a} + \frac{1}{a^2} \operatorname{sgn}(x_2) \ln |1 + a|x_2|| \quad (3-51)$$

$$\sigma(x_1, x_2) = x_1 - F(x_2) \quad (3-52)$$

于是曲线  $\gamma$  方程可写为

$$\gamma: \sigma(x_1, x_2) = x_1 - F(x_2) = 0 \quad (3-53)$$

曲线  $\gamma$  将相平面分成两部分, 如图3-7所示。  $\gamma$  的上半平面包括  $\gamma_-$  记为  $R_-$ ,  $\gamma$  的下半平面包括  $\gamma_+$  记为  $R_+$ , 那么

$$\begin{aligned} R_+ &= \{(x_1, x_2) | \sigma(x_1, x_2) < 0\} \cup \gamma_+ \\ R_- &= \{(x_1, x_2) | \sigma(x_1, x_2) > 0\} \cup \gamma_- \end{aligned} \quad (3-54)$$

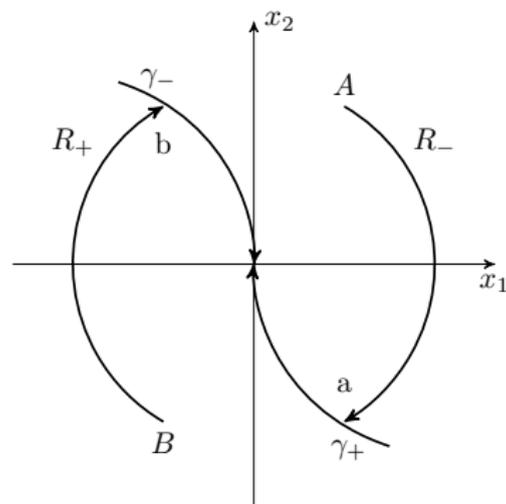


图 3-7:  $\frac{1}{s(s+a)}$  系统的时间最优相轨迹和开关线

由于最优控制只取  $\pm 1$ ，它们的切换最多一次，根据状态初始位置不同，它们最优控制是不同的，如图中初始状态在 A 点时，它属于  $R_-$ ，所以开始  $u^* = -1$ 。当运动到达  $\gamma_+$  时，与  $\gamma_+$  交于 a 点，马上切换为  $u^* = +1$ ，以后沿  $\gamma_+$  运动直到平衡位置 0，再除去控制量  $u^*$ 。当初始状态在 B 点时，它属于  $R_+$ ，最优控制应先取  $u^* = +1$ ，到达  $\gamma_-$  交于 b 点时，马上切换为  $u^* = -1$ ，以后沿  $\gamma_-$  继续运动，直到平衡位置 0，切除控制量。

综上所述，最优控制的状态反馈规律为

$$u^*(x_1, x_2) = \begin{cases} +1 & (x_1, x_2) \in R_+ \text{ 及 } \gamma_+ \\ -1 & (x_1, x_2) \in R_- \text{ 及 } \gamma_- \end{cases} \quad (3-55)$$

最短时间最优控制的方框图如图3-8所示，图中虚线部分是最短时间最优控制器。

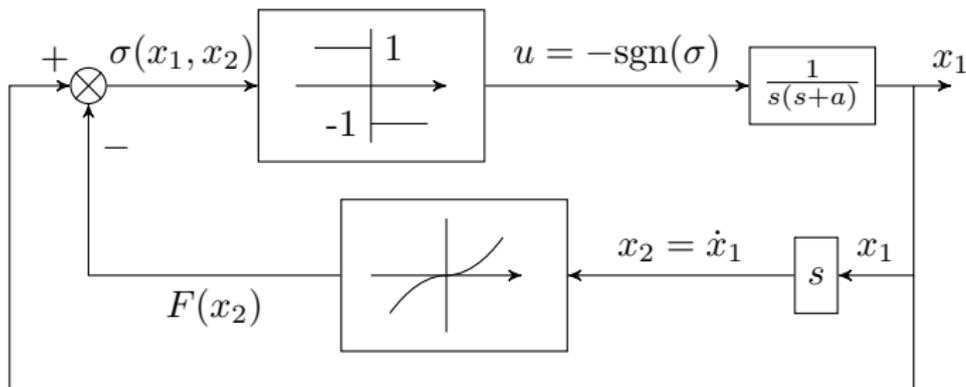


图 3-8:  $\frac{1}{s(s+a)}$  系统的时间最优控制框图



# 最少燃料控制问题

在人类的经济活动、军事行动以及其它活动中无时无刻不在消耗着形形色色的燃料，减少燃料消耗，节省能源成了当今世界科研的重要课题。特别在宇宙航行中，所消耗的燃料十分昂贵，而且如果需要的燃料多了，会减少运送的有效载荷（如卫星、空间站等），因此在宇宙航行中最早提出了最少燃料消耗的最优控制问题。一般来说，控制物体运动的推力或力矩的大小，是和单位时间内燃料消耗量成正比的，因而在某一过程中所消耗的燃料总量可用下面的积分指标来表示

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$$

其中  $u(t)$  是单位时间内的燃料消耗量。

值得指出的是，在最少燃料控制问题中，终端时间  $t_f$  一般应给定，或者是考虑响应时间和最少燃料的综合最优问题。因为若考虑纯粹的最少燃料控制问题，则将导致系统的响应时间过长，理论上要经过无穷长时间，系统才转移到所要求的状态。这是很显然的，因为燃料消耗得少，推力就小，系统的运动加速度和速度就小。

另一方面所指定的时间  $t_f$  必须大于同一问题的最短时间控制所解出的最短时间  $t_f^*$ ，否则最少燃料控制将会无解。

我们还是以重积分系统为例来说明最少燃料控制的解法。



# 重积分系统的最少燃料控制

## 例 3-3

系统状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = u \quad (3-56)$$

初始条件

$$x_1(t_0) = x_{10} \quad x_2(t_0) = x_{20} \quad (3-57)$$

终端条件

$$x_1(t_f) = 0 \quad x_2(t_f) = 0 \quad (3-58)$$

控制约束

$$|u(t)| \leq 1 \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (3-59)$$

求出使性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \quad (3-60)$$

取极小的最优控制。

解：用极小值原理求解，哈密顿函数为

$$H = |u(t)| + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t) \quad (3-61)$$

协态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \end{aligned} \quad (3-62)$$

积分上面两个方程可得

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= c_1 \\ \lambda_2(t) &= c_2 - c_1 t \end{aligned} \quad (3-63)$$

这里哈密顿函数  $H$  与最短时间控制的  $H$  不同，考察  $H$  的表达式可知，无论  $\lambda_1 x_2(t)$  为何值，使  $H$  极小等价于求下式的极小

$$\min_{u(t) \in \Omega} [|u(t)| + \lambda_2(t)u(t)]$$

考察上面的表达式：

- 当  $|\lambda_2(t)| < 1$  时，如  $u(t) \neq 0$ ，则  $[|u(t)| + \lambda_2(t)u(t)] > 0$ ，故应取  $u(t) = 0$ ；
- 当  $|\lambda_2(t)| > 1$ ，则应取  $u(t) = -\text{sgn}[\lambda_2(t)]$ ，使  $[|u(t)| + \lambda_2(t)u(t)] < 0$ 。

于是可得出使  $H$  极小的最优控制规律为

$$u(t) = 0 \quad \text{if } |\lambda_2(t)| < 1 \quad (3-64)$$

$$u(t) = -\text{sgn}[\lambda_2(t)] \quad \text{if } |\lambda_2(t)| > 1 \quad (3-65)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 \quad \text{if } \lambda_2(t) = -1 \quad (3-66)$$

$$-1 \leq u(t) \leq 0 \quad \text{if } \lambda_2(t) = +1 \quad (3-67)$$

注意到上面得到的最优控制规律中前两式确定了  $u(t)$  可取值  $0$ 、 $\pm 1$ ，而后两式只确定了  $u(t)$  的符号，未确定  $u(t)$  的值。但由  $\lambda_2(t)$  的表达式可知，只要  $c_1 \neq 0$ ， $\lambda_2(t)$  就随  $t$  而线性变化并有图3-2所示四种图形，于是  $\lambda_2(t)$  只可能在两个孤立的时刻  $t$  取得值  $+1$  和  $-1$ 。这两个孤立时刻  $u(t)$  的值对积分指标  $J$  的贡献为零，因此我们可不加考虑，而认为  $u(t)$  只能取值  $0$  和  $\pm 1$ 。这说明  $u(t)$  可用带死区的继电函数描述，如图3-9。

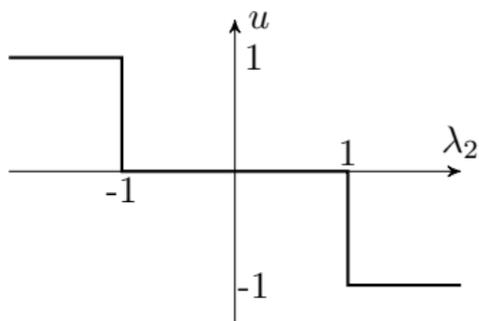


图 3-9: 带死区的继电函数

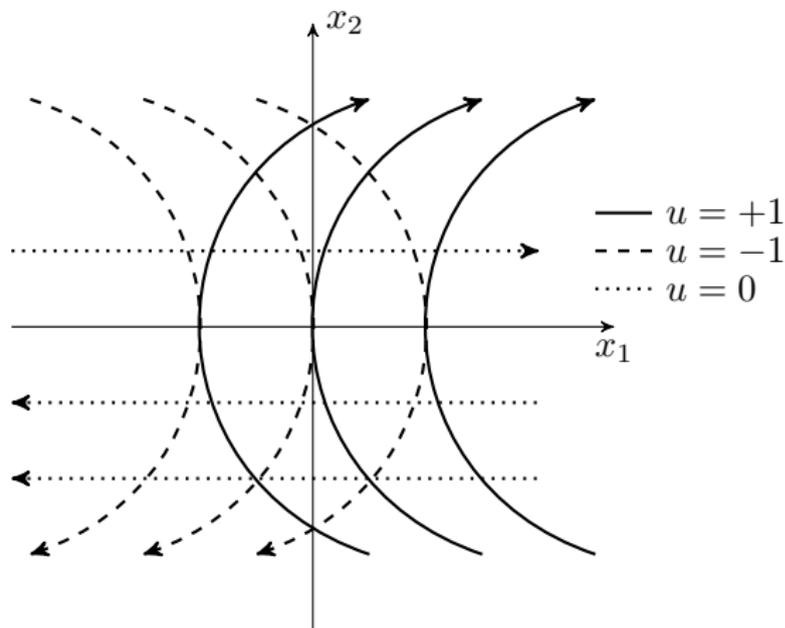


图 3-10: 最少燃料控制的控制量和相轨迹

和最短时间控制一样，  
 $u(t) = +1$  时的状态轨迹为

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) + c \quad (3-68)$$

在图3-10中用实线表示。

$u(t) = -1$  时的状态轨迹为

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + c \quad (3-69)$$

在图3-10中用虚线表示。

最少燃料控制的特点是  $u(t)$  可取零值。当  $u(t) = 0$ ，由状态方程可求得

$$x_2(t) = x_{20} \quad x_1(t) = x_{10} + x_{20}(t - t_0) \quad (3-70)$$

状态轨迹为水平线，在图3-10中用点划线表示。当  $x_{20} > 0$  时，水平线向右移动， $x_{20} < 0$  时，水平线向左移动。

若初始状态  $x_{10}, x_{20}$  是第一象限内的点 A，则从图3-10状态轨迹的运动方向可知，引向原点的轨迹有下面几种（见图3-11）：

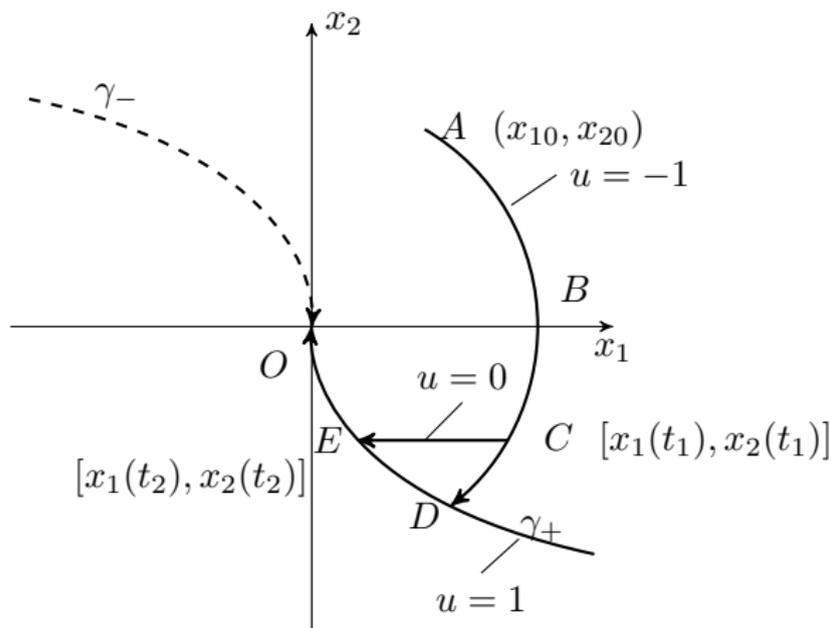


图 3-11: 最少燃料控制的相轨迹

- ① 沿 ABO 到达原点，对应的控制序列  $u(t)$  为  $\{-1, 0\}$ 。这是最少燃料控制，但因为在 BO 段  $x_2 = 0$  (即  $\dot{x}_1 = 0$ )，故  $x_1$  到达原点的时间  $t_f$  为无穷大，不能满足给定值的要求。
- ② 沿 ADO 到达原点，对应的控制序列为  $\{-1, +1\}$ 。这是最短时间控制的轨迹，到达原点时间将小于给定的  $t_f - t_0$ ，但它不是最少燃料控制。
- ③ 沿 ACEO 到达原点。其中 C 点和 E 点坐标待定，以满足给定的终端时刻  $t_f$ 。这是满足终端时刻  $t_f$  要求的最少燃料控制。

设初始点 A 的时刻为  $t_0$ , 坐标为  $x_{10}, x_{20}$ ; 到达 C 点的时刻为  $t_1$ , 坐标为  $x_1(t_1), x_2(t_1)$ , 到 E 点的时刻为  $t_2$ , 坐标为  $x_1(t_2), x_2(t_2)$ ; 到达原点 O 的时刻为  $t_f$ 。AC 段对应  $u = -1$ , CE 段  $u = 0$ , EO 段  $u = +1$ , 由积分状态方程(3-56)可得

$u = -1$  :

$$x_2(t_1) = -t_1 + x_{20} \quad (3-71)$$

$$x_1(t_1) = -\frac{1}{2}t_1^2 + x_{20}t_1 + x_{10} \quad (3-72)$$

$u = 0$  :

$$x_2(t_2) = x_2(t_1) \quad (3-73)$$

$$x_1(t_2) = x_1(t_1) + x_2(t_1)(t_2 - t_1) \quad (3-74)$$

$u = 1$  :

$$0 = x_2(t_2) + (t_f - t_2) \quad (3-75)$$

$$0 = x_1(t_2) + x_2(t_2)(t_f - t_2) + \frac{1}{2}(t_f - t_2)^2 \quad (3-76)$$

由上面六个方程来解六个未知数： $t_1$ ,  $t_2$ ,  $x_1(t_1)$ ,  $x_1(t_2)$ ,  $x_2(t_1)$ ,  $x_2(t_2)$ 。  
由(3-75)、(3-76)两式消去  $(t_f - t_2)$ , 再考虑(3-73)式可得

$$x_1(t_2) = \frac{1}{2}x_2^2(t_2) = \frac{1}{2}x_2^2(t_1) \quad (3-77)$$

$$t_2 = t_f + x_2(t_2) = t_f + x_2(t_1) \quad (3-78)$$

由(3-71)、(3-72)两式得

$$t_1 = x_{20} - x_2(t_1) \quad (3-79)$$

$$x_1(t_1) = x_{10} - \frac{1}{2}x_2^2(t_1) + \frac{1}{2}x_{20}^2 \quad (3-80)$$

由(3-78)、(3-79)两式得

$$t_2 - t_1 = 2x_2(t_1) + t_f - x_{20} \quad (3-81)$$

将(3-81)代入(3-74)式得

$$2x_2^2(t_1) + (t_f - x_{20})x_2(t_1) + x_1(t_1) - x_1(t_2) = 0$$

再利用(3-77)和(3-80)式, 即得

$$x_2^2(t_1) + (t_f - x_{20})x_2(t_1) + x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 = 0$$

由上式解出

$$x_2(t_1) = -\frac{t_f - x_{20}}{2} \pm \frac{1}{2}[(t_f - x_{20})^2 - 4x_{10} - 2x_{20}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3-82)$$

这里必须保证  $x_2(t_1)$  为实数, 并在上式中选择正确的加减号。为了使  $x_2(t_1)$  为实数, 必须有

$$(t_f - x_{20})^2 - 4x_{10} - 2x_{20}^2 \geq 0$$

这说明, 若  $t_f$  小于规定最短时间 (使上式小于零的  $t_f$  值), 最少燃料控制是无解的。

为了选择正确的加、减号，应注意有下面的关系

$$0 < t_1 < t_2 < t_f$$

即  $t_2 - t_1 > 0$ ，由(3-81)式可得

$$x_2(t_1) > -\frac{1}{2}(t_f - x_{20})$$

于是从(3-82)式可知，应选择加号，即

$$x_2(t_1) = -\frac{1}{2} \left\{ t_f - x_{20} - [(t_f - x_{20})^2 - 4x_{10} - 2x_{20}^2]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3-83)$$

将上式代入 (4-78) 和 (4-79) 式可得

$$t_1 = \frac{1}{2} \left\{ t_f + x_{20} - [(t_f - x_{20})^2 - 4x_{10} - 2x_{20}^2]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3-84)$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \left\{ t_f + x_{20} + [(t_f - x_{20})^2 - 4x_{10} - 2x_{20}^2]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3-85)$$

这样，我们就完全可以确定转换点 C 和 E 的坐标。由图3-11可见 E 点的坐标  $[x_1(t_2), x_2(t_2)]$  处在开关线  $\gamma_+$  上，可按最短时间控制一样的方式来构成反馈控制。C 点坐标  $[x_1(t_1), x_2(t_1)]$  由式(3-80)和(3-83)给出，由此二式可见，它们取决于  $t_f$  和  $x_{10}$ 、 $x_{20}$ 。当  $t_f$  给定时，还要给定一个初始条件，譬如  $x_{20} = 0$ ，才能从此二式消去  $x_{10}$  得到下面的 C 点轨迹曲线（在图3-12中用  $\Gamma(t_f)$  来表示）

$$x_1(t_1) = -1.5x_2^2(t_1) - x_2(t_1)t_f$$

当  $x_{10}$ 、 $x_{20}$  可取各种值时，开关曲线将取决于初始条件，这在工程实现上是不方便的。

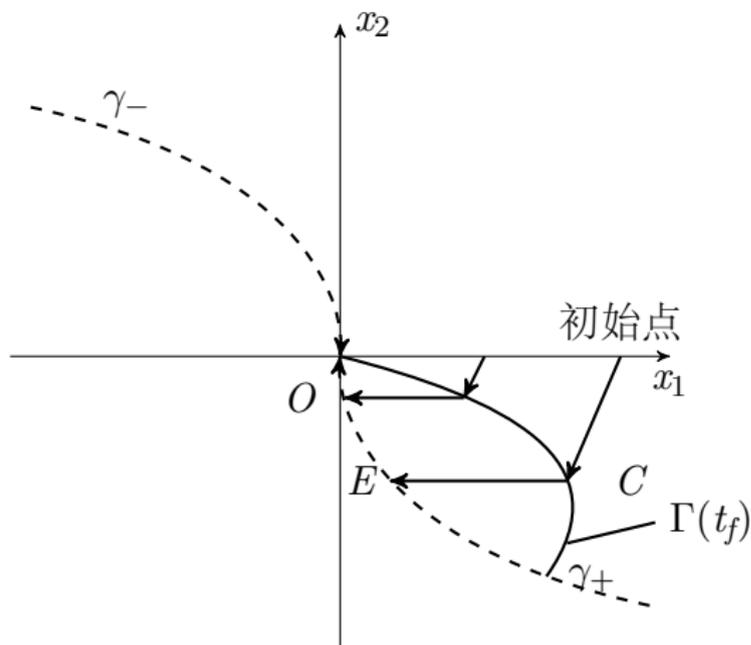


图 3-12: 满足终端时刻  $t_f$  要求的最少燃料控制的相轨迹

最后，我们要强调指出，规定了终端时刻，最少燃料的控制量  $u(t)$  不仅可取边界值  $\pm 1$ ，而且还可取零值，对重积分系统来讲，系统有加速段，减速段和等速运行段。而最短时间控制系统只有加速和减速段。以飞机为例，从一个城市以规定的时间飞到另一城市且使燃料消耗为最少的策略是，作一段加速飞行，作一段等速滑翔飞行，再作一段减速飞行，而且规定的时间要足够大，否则最少燃料问题是无解的。



# 离散系统的极小值原理

在现实世界中有些系统本身是离散的，要用离散的状态方程来加以描述。有些系统本身虽是连续的，但采用计算机控制，控制量只在离散的時刻算出来，设计这类系统时，连续对象的状态方程要进行离散化。下面就来讨论离散系统的极小值原理。问题的提法如下：

系统的状态方程为

$$X(k+1) = f[X(k), U(k), k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-86)$$

$X(k)$  为  $n$  维向量， $U(k)$  为  $m$  维向量。上式右端在一般情况下是  $X(k)$  和  $U(k)$  的非线性函数。

初始条件为

$$X(0) = X_0 \quad (3-87)$$

终端约束为

$$G[X(N), N] = 0 \quad (3-88)$$

$G$  是  $q$  维向量方程。性能指标为

$$J = \phi[X(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} F[X(k), U(k), k] \quad (3-89)$$

要求确定控制序列  $U(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , 使  $J$  最小。  
下面按控制向量  $U(k)$  受约束和不受约束两种情况来讨论。



## (一) 控制向量无约束

这时可用古典变分法求解。作增广性能指标

$$J_a = \phi[X(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} F[X(k), U(k), k] \\ + \lambda^T(k+1)\{f[X(k), U(k), k] - X(k+1)\} + v^T G[X(N), N] \quad (3-90)$$

式中,  $\lambda(k+1)$  是协态向量 ( $n$  维),  $v$  是拉格朗日乘子向量 ( $q$  维) 引入下面的哈密顿函数

$$H(X, U, \lambda, k) = F[X(k), U(k), k] + \lambda^T(k+1)f[X(k), U(k), k] \quad (3-91)$$

并令

$$\theta[X(N), N] = \phi[X(N), N] + v^T G[X(N), N] \quad (3-92)$$

则

$$\begin{aligned}
 J_a &= \theta[X(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} [H(X, U, \lambda, k) - \lambda^T(k+1)X(k+1)] \\
 &= \theta[X(N), N] - \lambda^T(N)X(N) + \lambda^T(0)X(0) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} [H(X, U, \lambda, k) - \lambda^T(k)X(k)]
 \end{aligned} \tag{3-93}$$

$J_a$  的一次变分可写成

$$\begin{aligned}
 \delta J_a &= \left[ \frac{\partial \theta^T}{\partial X(N)} - \lambda(N) \right] \delta X(N) + \lambda^T(0) \delta X(0) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial H(k)}{\partial X(k)} \right)^T - \lambda^T(k) \right] \delta X(k) + \left( \frac{\partial H(k)}{\partial U(k)} \right)^T \delta U(k) \right\}
 \end{aligned} \tag{3-94}$$

上式中  $H(k) = H(X, U, \lambda, k)$ 。由于初始条件  $X(0)$  给定，故  $\delta X(0) = 0$ 。根据  $\delta J_a$  以及  $\delta X(N)$ ,  $\delta X(k)$ ,  $\delta U(k)$  的任意性，可推导出最优控制序列应满足的必要条件：

正则方程

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial X(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-95)$$

$$X(k+1) = \frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} \quad (3-96)$$

横截条件

$$\lambda(N) = \frac{\partial \theta}{\partial X(N)} = \frac{\partial \phi}{\partial X(N)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(N)} v \quad (3-97)$$

控制方程

$$\frac{\partial H(k)}{\partial U(k)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-98)$$

## 初始条件

$$X(0) = X_0 \quad (3-99)$$

所得结果与连续系统类似，但应注意协态方程(3-95)的右侧无负号。从上面的一组方程可知，我们已知初始条件  $X(0) = X_0$ ，又从横截条件可求出  $\lambda(N)$ ，这样得出了离散非线性两点边值问题，求解一般是困难的。



## (二) 控制向量有约束

这时  $\frac{\partial H(k)}{\partial U(k)} = 0$  一般不成立。根据极小值原理，哈密顿函数在最优控制序列上取极小值，即

$$H[X^*(k), U^*(k), \lambda^*(k+1), k] = \min_{U \in \Omega} [X^*(k), U(k), \lambda^*(k+1), k]$$

### 例 3-4

系统的状态方程为

$$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad x(0) = 1 \quad (3-100)$$

无约束，指标函数为

$$J(u) = \frac{1}{2}x^2(2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^1 u^2(k) \quad (3-101)$$

用离散极小值原理求最优控制  $u^*(0)$ ， $u^*(1)$  使  $J$  取极小。

解：哈密顿函数为

$$H(k) = \frac{1}{2}u^2(k) + \lambda(k+1)[x(k) + u(k)] \quad (3-102)$$

协态方程为

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = \lambda(k+1) \quad (3-103)$$

即协态为常数。

横截条件为

$$\lambda(2) = \frac{\partial \phi}{\partial x(2)} = \frac{\partial [0.5x^2(2)]}{\partial x(2)} = x(2) \quad (3-104)$$

控制方程为

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = u(k) + \lambda(k+1) = 0 \quad (3-105)$$

$$u(k) = -\lambda(k+1) \quad (3-106)$$

因协态为常数，故控制也是常数，令

$$u(k) = u \quad (3-107)$$

现在来解系统的状态方程，由初始条件  $x(0) = 1$  可得

$$x(1) = 1 + u \quad (3-108)$$

$$x(2) = x(1) + u = 1 + 2u \quad (3-109)$$

因为

$$x(2) = \lambda(2) = -u = 1 + 2u \quad (3-110)$$

故

$$u = u^* = -\frac{1}{3} \quad (3-111)$$

于是最优控制为

$$u^*(k) = -\frac{1}{3} \quad k = 0, 1 \quad (3-112)$$

代入系统状态方程，可求得最优状态为

$$x^*(0) = 1 \quad x^*(1) = \frac{2}{3} \quad x^*(2) = \frac{1}{3} \quad (3-113)$$

## 例 3-5

在  $N$  级换热器系列的最优设计中, 设  $x(k)$  为流出第  $k$  个换热器的油料温度,  $u(k-1)$  是第  $k$  个换热器的换热面积,  $T_k$  是第  $k$  个换热器的热载体温度,  $Q_k$  是第  $k$  个换热器的正常数。

则状态方程为

$$x(k+1) = \frac{x(k) + Q_{k+1} T_{k+1} u(k)}{1 + Q_{k+1} u(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (3-114)$$

方程右端对  $u(k)$  是非线性的。这里  $k$  表示加热器级数, 是空间离散变量, 但在求解时与时间离散问题一样。边界条件为

$$x(0) = a \quad x(N) = b \quad (3-115)$$

性能指标是使换热总面积最小, 即

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} u(k) \quad (3-116)$$

最小。

解：这里  $u(k)$  无约束，可用变分法求解。作哈密顿函数

$$H(k) = u(k) + \lambda(k+1) \frac{x(k) + Q_{k+1} T_{k+1} u(k)}{1 + Q_{k+1} u(k)} \quad (3-117)$$

协态方程为

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = [1 + Q_{k+1} u(k)]^{-1} \lambda(k+1)$$

即

$$\lambda(k+1) = [1 + Q_{k+1} u(k)] \lambda(k) \quad (3-118)$$

控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial u(k)} = 0$$

即

$$1 + \lambda(k+1) \frac{Q_{k+1} [T_{k+1} - x(k)]}{[1 + Q_{k+1} u(k)]^2} = 0 \quad (3-119)$$

由上式求出  $\lambda(k+1)$  比求  $u(k)$  容易, 故解得

$$\lambda(k+1) = -\frac{[1 + Q_{k+1}u(k)]^2}{Q_{k+1}[T_{k+1} - x(k)]} \quad (3-120)$$

将(3-120)式代入协态方程(3-118), 消去  $\lambda(k)$ , 得

$$\frac{[1 + Q_{k+1}u(k)]^2}{Q_{k+1}[T_{k+1} - x(k)]} = \frac{[1 + Q_k u(k-1)]^2}{Q_k[T_k - x(k-1)]} \quad (3-121)$$

由状态方程(3-114)可解出  $u(k)$

$$u(k) = \frac{x(k+1) - x(k)}{Q_{k+1}[T_{k+1} - x(k+1)]} \quad (3-122)$$

令  $k = k-1$ , 由上式可得

$$u(k-1) = \frac{x(k) - x(k-1)}{Q_k[T_k - x(k)]} \quad (3-123)$$

将(3-122)、(3-123)代入(3-121)，消去  $u(k)$ ，可得

$$x(k-1) = x(k) + [T_k - x(k)] \left\{ 1 - \frac{Q_k[T_k - x(k)]}{Q_{k+1}[T_{k+1} - x(k+1)]} \right\} \quad (3-124)$$

(3-124)式是关于  $x(k)$  的非线性差分方程，若  $x(k)$  和  $x(k+1)$  已知就可递推求出  $x(k-1)$ ，故从终端  $k=N$  向后递推比较方便。已知  $x(N) = b$ ，但不知  $x(N-1)$ ，只能先假定一个  $x(N-1)$ ，由(3-124)算出  $x(N-2)$ ；再循环用(3-124)可依次递推求得， $x(N-3) \cdots x(1), x(0)$ 。若最后求出的  $x(0)$  等于或很接近于给定的初始条件  $a$ ，则这组序列  $\{u(k)\}$  就是最优状态轨迹；否则另取  $x(N-1)$  再重算，直到  $x(0) \approx a$ ，这组序列  $\{x(k)\}$  就是最优状态轨迹。把  $\{x(k)\}$  代入式(3-122)就可求出最优控制序列  $\{u(k)\}$ 。

从上面的说明可知，我们要反复试凑以满足  $x(k)$  的边界条件，这是非线性两点边值问题所引起的。这里因为  $x(k)$  的初始和终端条件都给定，我们采用的解题技巧是消去协态量  $\lambda(k)$ ，直接解  $x(k)$ 。



# 小结

- 1、极小值原理是对经典变分法的扩展，它可以解决经典变分法无法解决的最优控制问题。也就是当控制有约束（控制变量属于一个有界闭集，可表示为  $U \in \Omega$  或  $g[U(t), t] \geq 0$ ），哈密顿函数  $H$  对  $U$  不可微时，要用极小值原理。
- 2、极小值原理所得出的最优控制必要条件与变分法所得的条件的差别，仅在于用哈密顿函数在最优控制上取值的条件

$$H(X^*, U^*, \lambda^*, t) = \min_{U \in \Omega} H(X^*, U, \lambda^*, t)$$

代替  $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$ ，而后者可作为前者的特殊情况。其它条件如正则方程，横截条件，边界条件等都一样。

参看图3-1可知，极小值原理可解决在边界上取极值的情况，因此比变分法所得的条件大大加强了。总之，极小值原理可解决经典变分法可解决的问题，也可解决经典变分法不能解决的问题。所以有些书上把用经典变分法解决的问题也称为用极小值原理求解。若系统方程是非线性的，则用极小值原理求解（和经典变分法一样）将产生非线性微分方程两点边值问题，求解非常困难。

3、前面我们讨论了极小值原理，但经过简单的转换就可将极大值原理化为极小值原理。设要使性能指标  $J$  极大，对应的协态变量为  $\lambda'(t)$ ，拉格朗日乘子为  $v'$ ，则令  $J = -J'$  就化为  $J$  的极小值问题，并且极小值问题  $\lambda(t)$  和  $v$  与  $\lambda'$  和  $v'$  的关系为  $\lambda(t) = -\lambda'(t)$ ， $v = -v'$ 。

4、离散系统的极小值原理与连续系统的极小值原理所得出的最优解的必要条件在形式上是相似的，只是前者的协态方程(3-95)的右端没有负号。若系统方程是非线性差分方程，则离散极小值原理将产生非线性差分方程两点边值问题。从例5可见，即使对于一个简单的问题，求解也是很困难的。

5、极小值原理可成功地解决最短时间控制问题。若控制量满足约束条件  $u(t) \leq 1$ ，则最短时间的控制量只能取约束的边界值  $+1$  或  $-1$ 。于是在系统中必然要有一个二位置继电器式元件来产生  $u(t)$  这就是所谓的砰砰控制。对于简单二阶系统—重积分系统，在相平面  $x_1-x_2$  上的相轨迹是抛物线，开关曲线由  $\gamma_+$  和  $\gamma_-$  两个半支抛物线组成。

6、最少燃料控制的控制量可取边界值  $+1$ 、 $-1$  和  $0$ ，因此系统中必然要有一个包含死区的三位置继电器式元件来产生  $u(t)$ 。重积分系统的相轨迹除抛物线外还有平行于横轴的直线段。另外，终端时刻  $t_f$  必须大于同一问题的最短时间控制所需时间，否则最少燃料控制无解。