

现代控制理论

控制系统的状态空间分析与综合



❖ 经典控制理论:

数学模型: 线性定常高阶微分方程和传递函数;

分析方法: { 时域法 (低阶1~3阶)
根轨迹法 } 近似分析
频域法

适应领域: 单输入—单输出 (SISO) 线性定常系统

缺 点: 只能反映输入—输出间的外部特性, 难以揭示系统内部的结构和运行状态。

❖ 现代控制理论:

数学模型: 以一阶微分方程组成差分方程组表示的动态方程

分析方法: 精准的时域分析法

适应领域: { (1) 多输入—多输出系统 (MIMO、SISO、MISO、SIMO)
(2) 非线性系统
(3) 时变系统

优越性: { (1) 能描述系统内部的运行状态
(2) 便于考虑初始条件 (与传递函数比较)
(3) 适用于多变量、非线性、时变等复杂大型控制系统
(4) 便于计算机分析与计算
(5) 便于性能的最优化设计与控制

内容: 线性系统理论、最优控制、最优估计、系统辨识、自适应控制

首页

退出

第一章 控制系统的状态空间描述

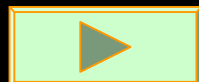
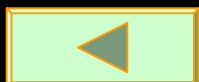
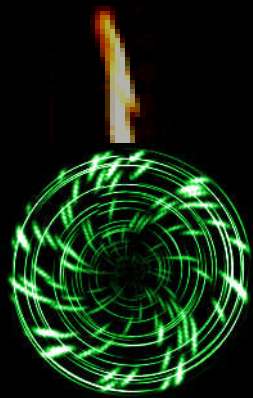
第二章 线性系统的运动分析

第三章 控制系统的李雅普诺夫稳定性分析

第四章 线性系统的可控性和可观测性

第五章 线性系统非奇异线性变换及系统的规范分解

第六章 线性定常控制系统的综合分析

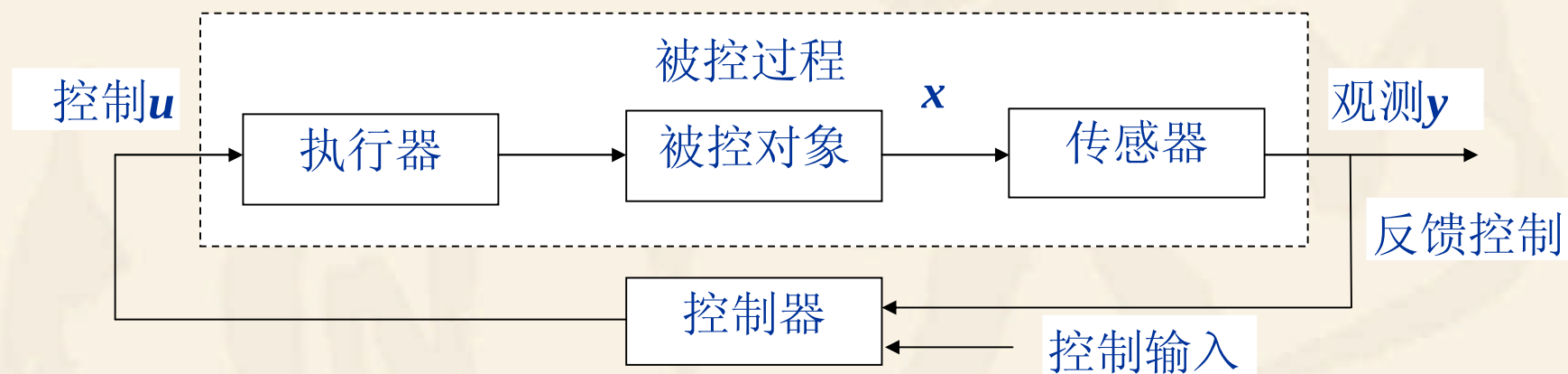


第一章 控制系统的状态空间

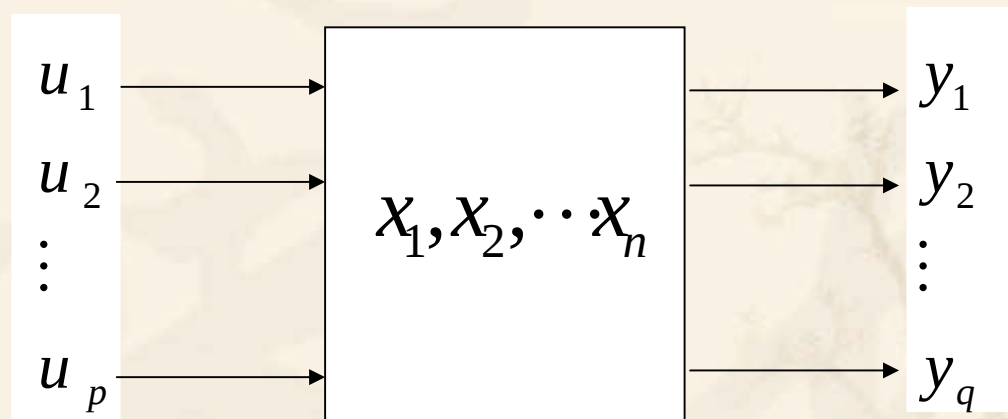
- ❖ 1.1 系统数学描述的两种基本方法
- ❖ 1.2 状态空间描述常用的基本概念
- ❖ 1.3 系统的传递函数矩阵
- ❖ 1.4 线性定常系统动态方程的建立



1.1 系统数学描述的两种基本方法

[首页](#)[跳转](#)[退出](#)

典型控制系统方框图



被 控 过 程



典型控制系统由被控对象、传感器、执行器和控制器组成。

被控过程具有若干输入端和输出端。

数学描述方法： $\left\{ \begin{array}{l} \text{输入—输出描述（外部描述）：高阶微分方程、传递函数矩阵。} \\ \text{状态空间描述（内部描述）：基于系统内部结构，是对系统的一种完整的描述。} \end{array} \right.$



1.2 状态空间描述常用的基本概念

[首页](#)[跳转](#)[退出](#)

- 1) **输入：**外部对系统的作用（激励）； **控制：**人为施加的激励；
输入分控制与干扰。
- 1) **输出：**系统的被控量或从外部测量到的系统信息。若输出是由传感器测量得到的，又称为**观测**。
- 2) **状态、状态变量和状态向量：**能完整描述和唯一确定系统时域行为或运行过程的一组独立（数目最小）的变量称为系统的状态；其中的各个变量称为状态变量。当状态表示成以各状态变量为分量组成的向量时，称为状态向量。
- 3) **状态空间：**以状态向量的各个分量作为坐标轴所组成的n维空间称为状态空间。
- 4) **状态轨线：**系统在某个时刻的状态，在状态空间可以看作是一个点。随着时间的推移，系统状态不断变化，并在状态空间中描述出一条轨迹，这种轨迹称为状态轨线或状态轨迹。
- 5) **状态方程：**描述系统状态变量与输入变量之间关系的一阶向量微分或差分方程称为系统的状态方程，它不含输入的微积分项。一般情况下，状态方程既是非线性的，又是时变的，可以表示为 $\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$
- 6) **输出方程：**描述系统输出变量与系统状态变量和输入变量之间函数关系的代数方程称为输出方程，当输出由传感器得到时，又称为观测方程。输出方程的一般形式为 $y(t) = g[x(t), u(t), t]$
- 7) **动态方程：**状态方程与输出方程的组合称为动态方程，又称为状态空间表达式。一般形式为



$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$$

$$y(t) = g[x(t), u(t), t]$$

或离散形式 $x(t_{k+1}) = f[x(t_k), u(t_k), t_k]$

$$y(t_k) = g[x(t_k), u(t_k), t_k]$$

- 9) **线性系统:** 线性系统的状态方程是一阶向量线性微分或差分方程, 输出方程是向量代数方程。线性连续时间系统动态方程的一般形式为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

- 10) **线性定常系统:** 线性系统的 A, B, C, D 或 G, H, C, D 中的各元素全部是常数。即

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

或离散形式

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

若有

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$



已知：

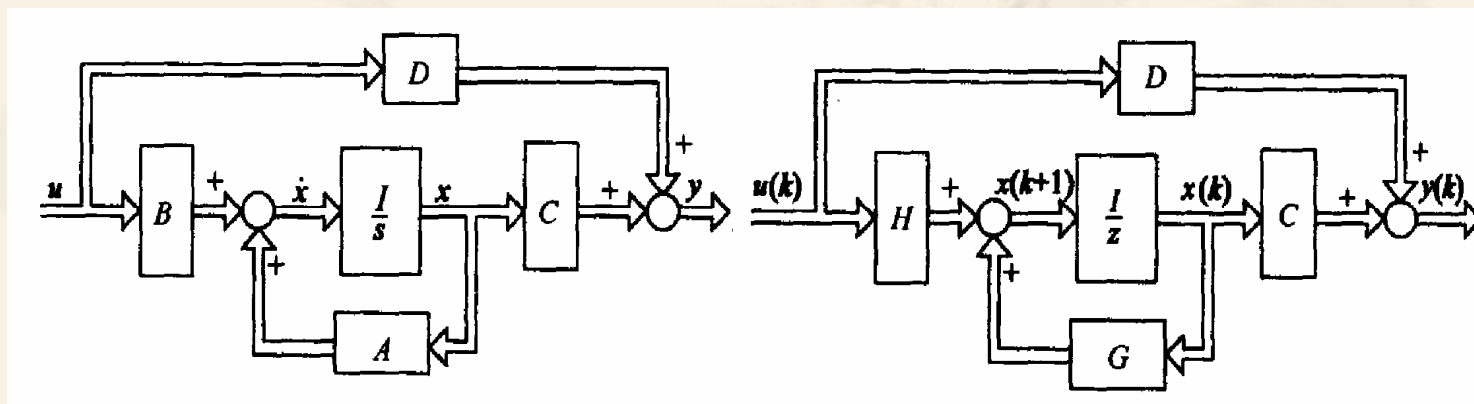
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$$

分别写出状态矩阵 **A**、控制矩阵 **B**、输出矩阵 **C**、前馈矩阵 **D**：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix}$$

为书写方便，常把连续系统和离散系统分别简记为 $S(A,B,C,D)$ 和 $S(G,H,C,D)$ 。

11) 线性系统的结构图：线性系统的动态方程常用结构图表示。



图中， I 为 $(n \times n)$ 单位矩阵， s 是拉普拉斯算子， z 为单位延时算子。

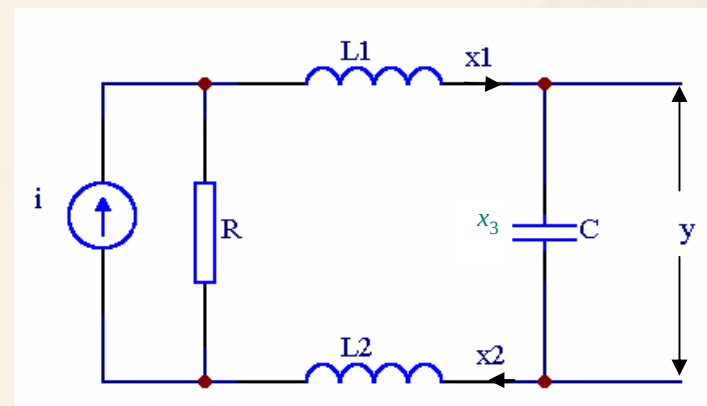
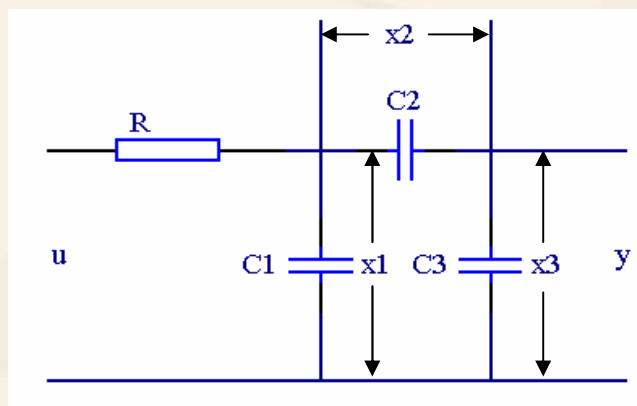


❖ 讨论： 1、状态变量的独立性。

2、由于状态变量的选取不是唯一的，因此状态方程、输出方程、动态方程也都不是唯一的。但是，用独立变量所描述的系统的维数应该是唯一的，与状态变量的选取方法无关。

3、动态方程对于系统的描述是充分的和完整的，即系统中的任何一个变量均可用状态方程和输出方程来描述。

例1—1 试确定图8-5中（a）、（b）所示电路的独立状态变量。图中 u 、 i 分别是输入电压和输入电流， y 为输出电压， x_i 为电容器电压或电感器电流。



解 并非所有电路中的电容器电压和电感器电流都是独立变量。对图8-5（a），不失一般性，假定电容器初始电压值均为0，有



$$x_2 = \frac{C_3}{C_2 + C_3} x_1$$

$$x_3 = \frac{C_2}{C_2 + C_3} x_1$$

因此，只有一个变量是独立的，状态变量只能选其中一个，即用其中的任意一个变量作为状态变量便可以确定该电路的行为。实际上，三个串并联的电容可以等效为一个电容。

对图 (b) $x_1 = x_2$ ，因此两者相关，电路只有两个变量是独立的，即 (x_1 和 x_3) 或 (x_2 和 x_3)，可以任用其中一组变量如 (x_2, x_3) 作为状态变量。



1.3 系统的传递函数矩阵

[首页](#)[跳转](#)[退出](#)

令初始条件为零, 对线性定常系统的动态方程进行拉氏变换, 可以得到

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

系统的传递函数矩阵 (简称传递矩阵) 定义为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

例1-2 已知系统动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

试求系统的传递函数矩阵。

解 已知

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0$$

故

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$



1.4 线性定常系统动态方程的建立

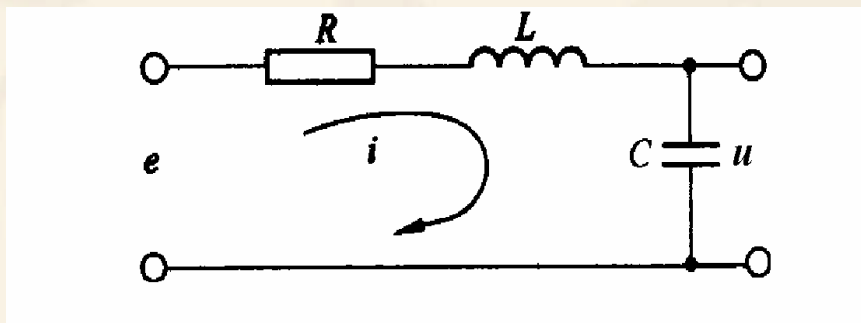
首页

跳转

退出

1.4.1 由物理模型建动态方程

根据系统物理模型建立动态方程



RLC 电路

例1-3 试列写如图所示RLC的电路方程，选择几组状态变量并建立相应的动态方程，并就所选状态变量间的关系进行讨论。

解 有明确物理意义的常用变量主要有：电流、电阻器电压、电容器的电压与电荷、电感器的电压与磁通。根据独立性要求，电阻器的电压与电流、电容器的电压与电荷、电感器的电流与磁通这三组变量不能选作为系统的状态。

根据回路电压定律
$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e$$

电路输出量 y 为
$$y = e_c = \frac{1}{C} \int i dt$$

1) 设状态变量为电感器电流和电容器电压，即 $x_1 = i$ $x_2 = \frac{1}{C} \int i dt$ 则状态方程为

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}e \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1$$

输出方程为

$$y = x_2$$



其向量-矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{C} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

简记为 $\dot{x} = Ax + be$

$$y = cx$$

式中, $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{C} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) 设状态变量为电容器电流和电荷, 即 $x_1 = i$, $x_2 = \int i dt$ 则有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e, y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

3) 设状态变量 $x_1 = \frac{1}{C} \int i dt + Ri$, $x_2 = \frac{1}{C} \int i dt$ (x_1 无明确意义的物理量), 可以推出

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 + R \frac{di}{dt} = \frac{1}{RC} (x_1 - x_2) + \frac{R}{L} (-x_1 + e)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} i = \frac{1}{RC} (x_1 - x_2)$$

$$y = x_2$$



其向量-矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - \frac{R}{L} & -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

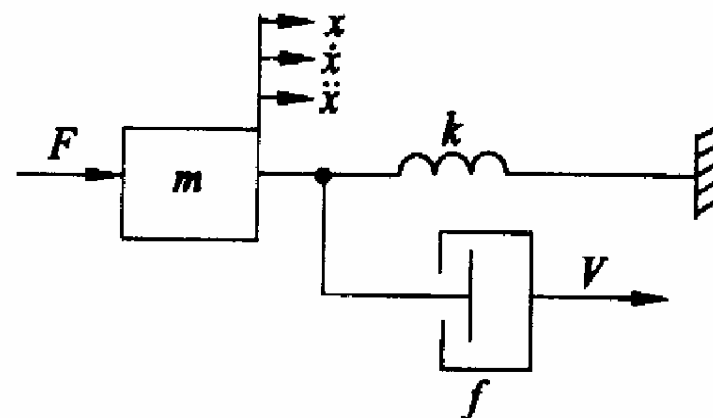
可见对同一系统，状态变量的选择不具有唯一性，动态方程也不是唯一的。

例1-4 由质量块、弹簧、阻尼器组成的双输入三输出机械位移系统如图所示，具有力 F 和阻尼器气缸速度 V 两种外作用，输出量为质量块的位移，速度和加速度。试列写该系统的动态方程。 m , k , f 分别为质量、弹簧刚度、阻尼系数； x 为质量块位移。

解 根据牛顿力学可知，系统所受外力 F 与惯性力 $m\ddot{x}$ 、阻尼力 $f(\dot{x}-V)$ 和弹簧恢复力 kx 构成平衡关系，系统微分方程如下：

$$m\ddot{x} + f(\dot{x} - V) + kx = F$$

这是一个二阶系统，若已知质量块的初始位移和初始速度，系统在输入作用下的解便可唯一确定，故选择质量块的位移和速度作为状态变量。设 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ 。由题意知系统有三个输出量，设 $y_1 = x_1 = x, y_2 = \dot{x} = x_2, y_3 = \ddot{x}$



双输入—三输出机械位移系统



于是由系统微分方程可以导出系统状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = \frac{1}{m} [-f(x_2 - V) - kx_1 + F]$$

其向量-矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ V \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ V \end{bmatrix}$$

1.4.2 由高阶微分方程建动态方程

1) 微分方程不含输入量的导数项： $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = \beta_0u$

选 n 个状态变量为 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)}$ 有

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + \beta_0u \\ y &= x_1 \end{aligned} \right\}$$

得到动态方程

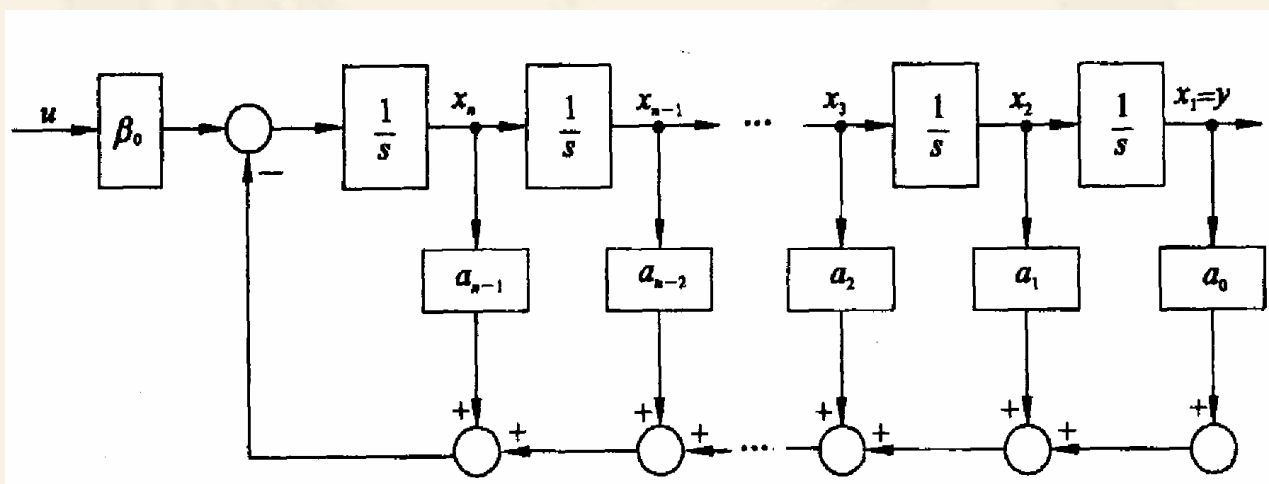
$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$



式中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}, c = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$



系统的状态变量图

例1-5

2) 微分方程输入量中含有导数项：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

一般输入导数项的次数小于或等于系统的阶数 n 。首先研究情况，为了避免在状态方程中出现输入导数项，可按如下规则选择一组状态变量，设



$$\left. \begin{aligned} x_1 &= y - h_0 u \\ x_i &= \dot{x}_{i-1} - h_{i-1} u \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\}$$

其展开式为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= y - h_0 u \\ x_2 &= \dot{x}_1 - h_1 u = \dot{y} - h_0 \dot{u} - h_1 u \\ x_3 &= \dot{x}_2 - h_2 u = \ddot{y} - h_0 \ddot{u} - h_1 \dot{u} - h_2 u \\ &\vdots \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} - h_{n-1} u = y^{(n-1)} - h_0 u^{(n-1)} - h_1 u^{(n-2)} - \dots - h_{n-1} u \end{aligned} \right\} \quad \#$$

式中, $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}$ 是 n 个待定常数。是 n 个。

由上式的第一个方程可得输出方程是 n $y = x_1 + h_0 u$

其余 $(n-1)$ 个状态方程如下 n 个 $\dot{x}_1 = x_2 + h_1 u$

$$\dot{x}_2 = x_3 + h_2 u$$

$\vdots$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n + h_{n-1} u$$

对 # 式求导,
有:

$$\dot{x}_n = y^{(n)} - h_0 u^{(n)} - h_1 u^{(n-1)} - \dots - h_{n-1} \dot{u} =$$

$$(-a_{n-1} y^{(n-1)} - \dots - a_1 \dot{y} - a_0 y + b_0 u^{(n)} + \dots + b_0 u) - h_0 u^{(n)} - h_1 u^{(n-1)} - \dots - h_{n-1} \dot{u}$$



由展开式将 $y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y$ 均以 x_i 及 u 的各阶导数表示, 经整理可得

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - \dots - a_{n-1} x_n + (b_n - h_0) u^{(n)} + (b_{n-1} - h_1 - a_{n-1} h_0) u^{(n-1)} + \dots + (b_1 - h_{n-1} - a_{n-1} h_{n-2} - \dots - a_1 h_0) \dot{u} + (b_0 - a_{n-1} h_{n-1} - \dots - a_1 h_1 - a_0 h_0) u$$

令上式中 u 的各阶导数的系数为零, 可确定各 h 值

$$h_0 = b_n$$

$$h_1 = b_{n-1} - a_{n-1} h_0$$

$$\vdots$$

$$h_{n-1} = b_1 - a_{n-1} h_{n-2} - \dots - a_1 h_0$$

记
$$h_n = b_0 - a_{n-1} h_{n-1} - \dots - a_1 h_1 - a_0 h_0$$

故
$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - \dots - a_{n-1} x_n + h_n u$$

则系统的动态方程为
$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx + du$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad d = h_0$$



若输入量中仅含 m 次导数且 $m < n$ ，可将高于 m 次导数项的系数置0，仍可应用上述公式。

1.4.3 由系统传递函数建立动态方程

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

应用综合除法有
$$G(s) = b_n + \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \cong b_n + \frac{N(s)}{D(s)}$$

式中， b_n 是直接联系输入、输出量的前馈系数，当 $G(s)$ 的分母次数大于分子次数时， $b_n = 0$ ， $\frac{N(s)}{D(s)}$ 是严格有理真分式，其分子各次项的系数分别为

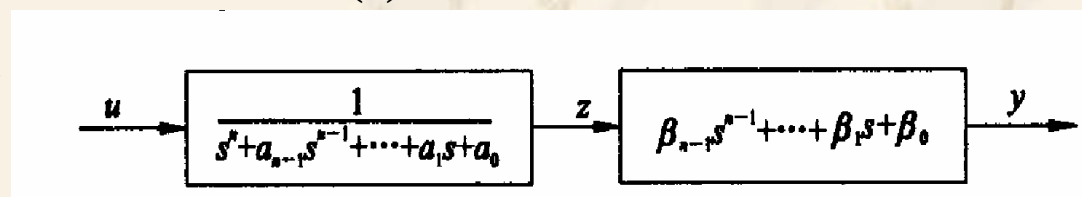
$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 - a_0 b_n \\ \beta_1 &= b_1 - a_1 b_n \\ &\vdots \\ \beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{aligned}$$

下面介绍由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法：

1) $\frac{N(s)}{D(s)}$ 串联分解 如图，取 z 为中间变量，将 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 分解为相串联的两部分，有

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{z} + a_0 z = u$$

$$y = \beta_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + \beta_1 \dot{z} + \beta_0 z$$



选取状态变量 $x_1 = z, \quad x_2 = \dot{z}, \quad \cdots, \quad x_n = z^{(n-1)}$



则状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -a_0 z - a_1 \dot{z} - \cdots - a_{n-1} z^{(n-1)} + u \\ &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u\end{aligned}$$

输出方程为

$$y = \beta_0 x_1 + \beta_1 x_2 + \cdots + \beta_{n-1} x_n$$

其向量-矩阵形式

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx\end{aligned}$$

式中,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

当 A 和 b 具有以上形状时, A 阵称为友矩阵, 相应的状态方程则称为可控标准型。
 $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{n-1} = 0$ 时, A 和 b 的形式不变, $c = [\beta_0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$



当 $G(s) = b_n + \frac{N(s)}{D(s)}$ 时, A, b, c 不变, $y = cx + b_n u$

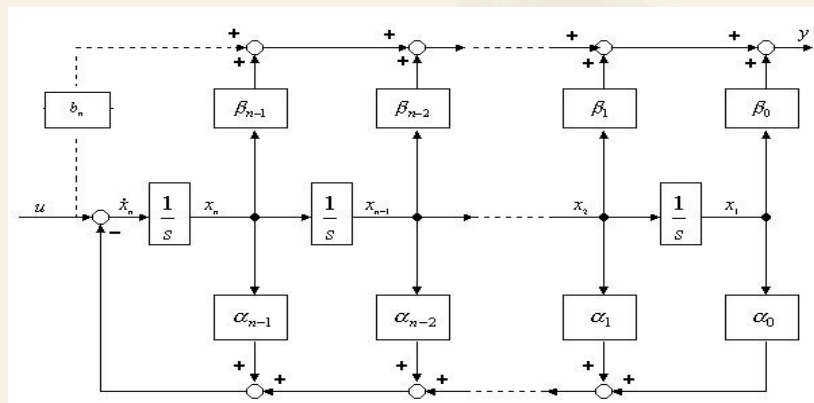
当 $b_n = 0$ 时, 若按下式选取状态变量 $A_c = A_o^T$ $b_c = c_o^T$ $c_c = b_o^T$ (对偶关系)
式中, T为转置符号, 则有

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad c = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

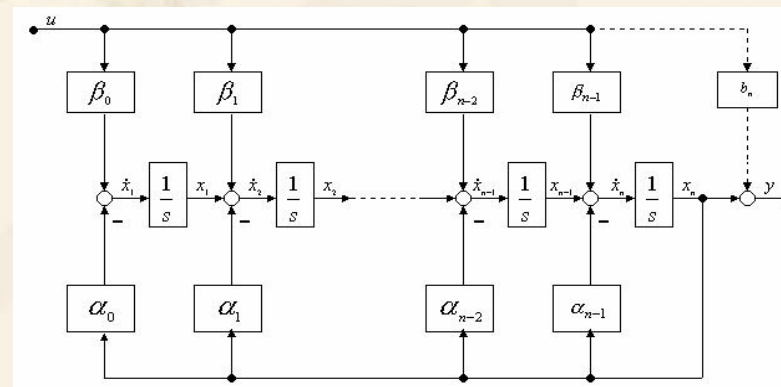
注意 A, c 的形状特征。若动态方程中的 A, c 具有这种形式, 则称为可观测标准型。

自行证明: 可控标准型和可观测标准型是同一传递函数的不同实现。

可控标准型和可观测标准型的状态变量图如图:



可控标准型状态变量图



可观测标准型状态变量图



例1-6 设二阶系统微分方程为 $\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = T\dot{u} + u$ ，试列写可控标准型、可观测标准型动态方程，并分别确定状态变量与输入，输出量的关系。

解 系统的传递函数为
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ts + 1}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}$$

于是，可控标准型动态方程的各矩阵为

$$x_c = \begin{bmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{bmatrix} \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix} \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_c = [1 \quad T]$$

由G(s)串联分解并引入中间变量z有 $\ddot{z} + 2\xi\omega\dot{z} + \omega^2 z = u$

$$y = T\dot{z} + z$$

对y求导并考虑上述关系式，则有 $\dot{y} = T\ddot{z} + \dot{z} = (1 - 2\xi\omega T)\dot{z} - \omega^2 Tz + Tu$

令 $x_{c1} = z$, $x_{c2} = \dot{z}$ ，可导出状态变量与输入，输出量的关系；

$$x_{c1} = [-T\dot{y} + (1 - 2\xi\omega)y + T^2 u] / (1 - 2\xi\omega T + \omega^2 T^2)$$

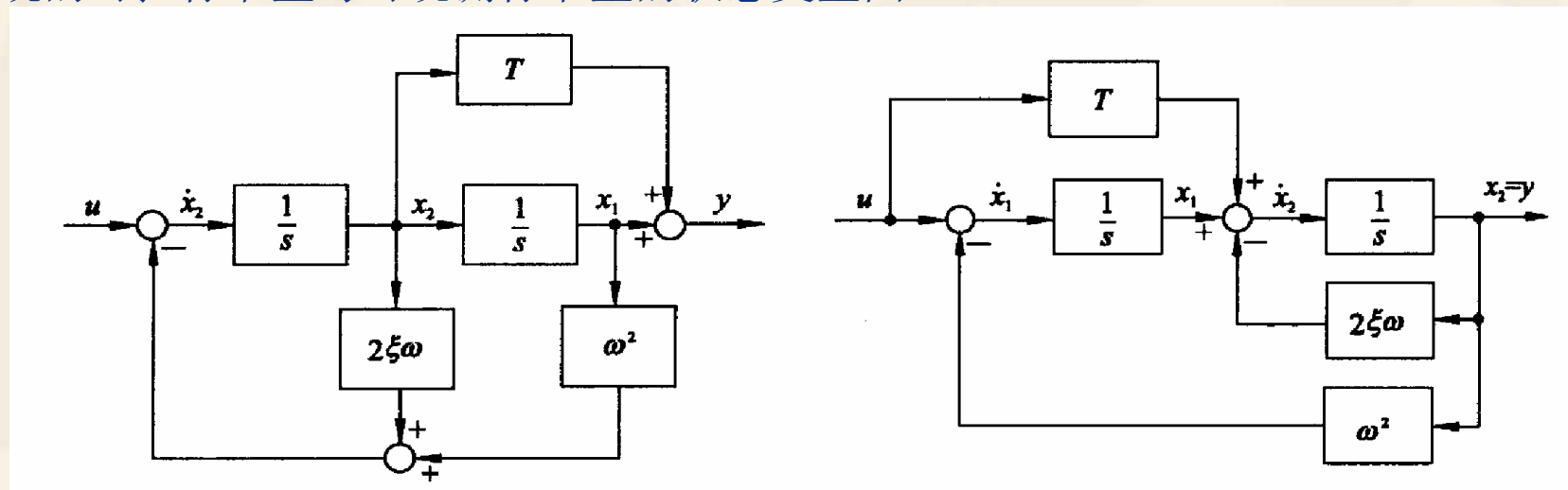
$$x_{c2} = (\dot{y} + \omega^2 Ty - Tu) / (1 - 2\xi\omega T + \omega^2 T^2)$$

可观测标准型动态方程中各矩阵为

$$x_o = \begin{bmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \end{bmatrix} \quad A_o = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & -2\xi\omega \end{bmatrix} \quad b_o = \begin{bmatrix} 1 \\ T \end{bmatrix} \quad c_o = [0 \quad 1]$$



状态变量与输入，输出量的关系为 $\dot{x}_{o1} = \dot{y} + 2\xi\omega y - Tu$ $x_{o2} = y$
 该系统的可控标准型与可观测标准型的状态变量图：



(a) 可控标准型实现

(b) 可观测标准型实现

2) $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时的情况 当 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时，动态方程除了可化为可控标准型或可观测标准型以外，还可化为对角型动态方程，其A阵是一个对角阵。设 $D(s)$ 可分解为 $D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)$

式中， $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为系统的单实极点，则传递函数可展成部分分式之和

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i}$$



而 $c_i = \left[\frac{N(s)}{D(s)} (s - \lambda_i) \right]_{s = \lambda_i}$, 为 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 在极点 λ_i 处的留数, 且有 $Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i} U(s)$

若令状态变量 $X_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i} U(s) \quad i = 1, 2, \dots, n$

其反变换结果为 $\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t) + u(t)$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$$

展开得 $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u$$

$\vdots$

$$\dot{x}_n = \lambda_n x_n + u$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

其向量-矩阵形式为 (其状态变量如图(a)所示)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



若令状态变量 $X_i(s) = \frac{c_i}{s - \lambda_i} U(s)$

则 $Y(s) = \sum_{i=1}^n X_i(s)$

进行反变换并展开有

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + c_1 u$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + c_2 u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = \lambda_n x_n + c_n u$$

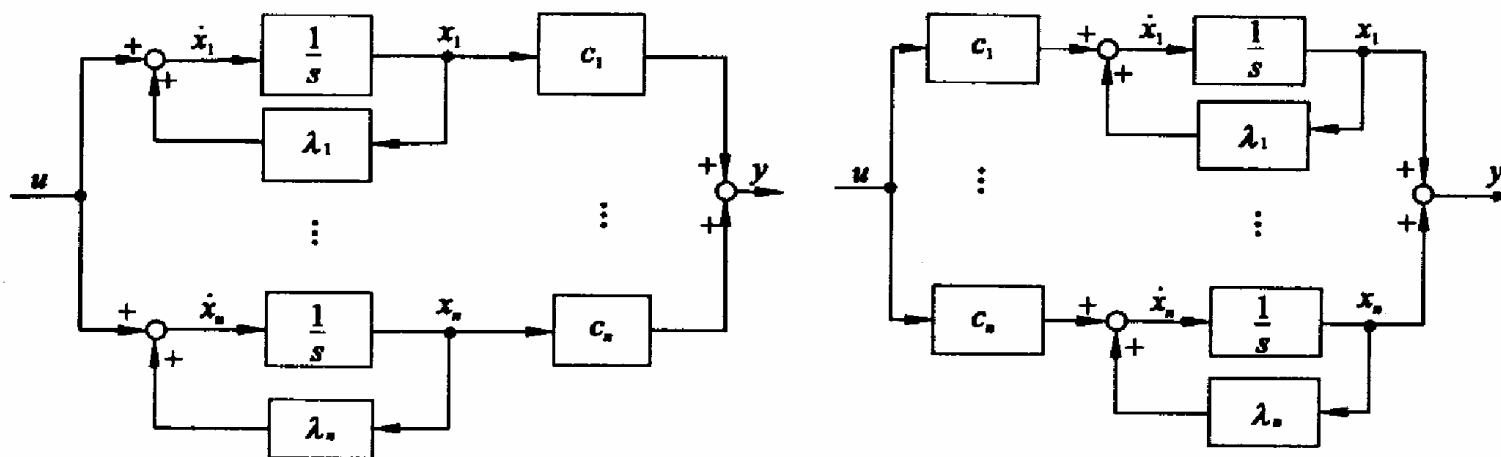
$$y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

其向量-矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

其状态变量图如图(b)所示，两者存在对偶关系
 对角型动态方程状态变量图 如下：





(a)

(b)

对角型动态方程状态变量图

3) $\frac{N(s)}{D(s)}$ 含重实极点时的情况 当传递函数除含单实极点之外还含有重实极点时，不仅可化为可控标准型或可观测标准型，还可化为约当标准型动态方程，其A阵是一个含约当块的矩阵。设 $D(s)$ 可分解为 $D(s) = (s - \lambda_1)^3 (s - \lambda_4) \cdots (s - \lambda_n)$

式中 λ_1 为三重实极点， $\lambda_4, \cdots, \lambda_n$ 为单实极点，则传递函数可展成为下列部分分式之和：

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_{11}}{(s - \lambda_1)^3} + \frac{c_{12}}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{c_{13}}{s - \lambda_1} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i}$$

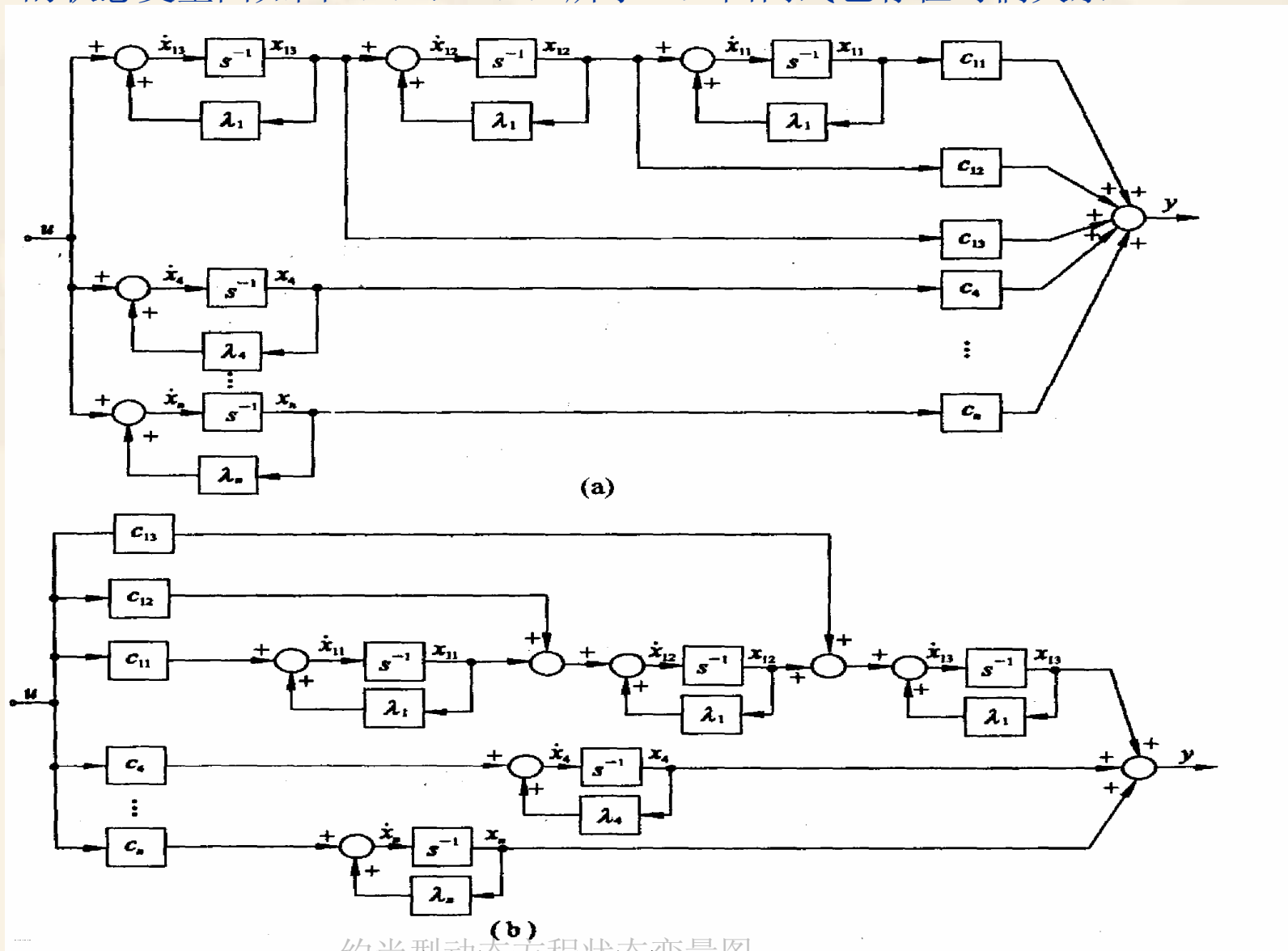
其状态变量的选取方法与之含单实极点时相同，可分别得出向量-矩阵形式的动态方程：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_4 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13} \quad c_4 \quad \cdots \quad c_n] x \end{cases}$$

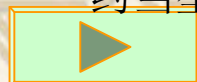
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & 0 \\ & 1 & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_4 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_4 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] x \end{cases}$$



其对应的状态变量图如图 (a), (b) 所示。上面两式也存在对偶关系。



约当型动态方程状态变量图



1.4.4 由差分方程和脉冲传递函数建立离散动态方程

单输入-单输出线性定常离散系统差分方程的一般形式为：

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_nu(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \cdots + b_1u(k+1) + b_0u(k)$$

两端取z变换并整理得

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = b_n + \frac{\beta_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$G(z)$ 称为脉冲传递函数 $[X_i(z)] = x_i(k)$ 用 $Z^{-1}[zX_i(z)]$ 换 $x_i(k+1)$ 系和，可以得到动态方程为：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] x(k) + b_n u(k)$$

简记为 $x(k+1) = Gx(k) + hu(k)$

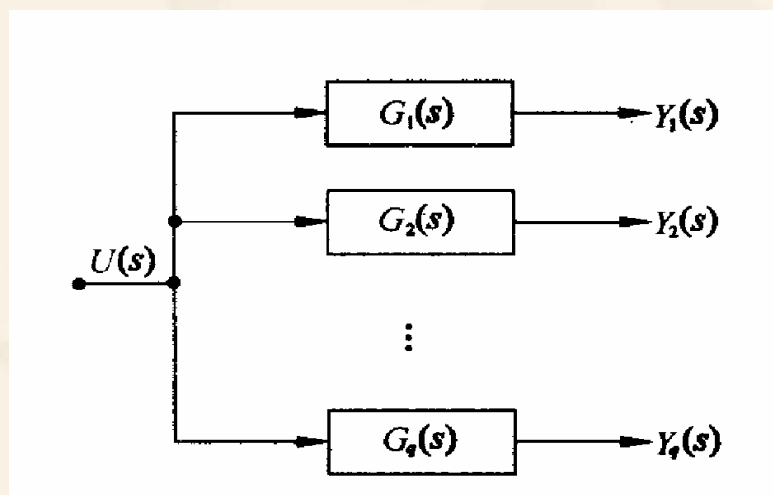
$$y(k) = cx(k) + du(k)$$



1.4.5 由传递函数矩阵建动态方程（传递函数矩阵的实现）

给定一传递函数矩阵 $G(s)$ ，若有一系统 (A, B, C, D) 能使 $C(sI - A)^{-1}B + D = G(s)$ 成立，则称系统 (A, B, C, D) 是 $G(s)$ 的一个实现。这里仅限于单输入-多输出和多输入-单输出系统。

1) SIMO系统的实现：



单输入—多输出系统结构图

1) 系统可看作由 q 个独立子系统组成，传递矩阵为：

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \\ \vdots \\ G_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + \hat{G}_1(s) \\ d_2 + \hat{G}_2(s) \\ \vdots \\ d_q + \hat{G}_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}_1(s) \\ \hat{G}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{G}_q(s) \end{bmatrix} = d + \hat{G}(s)$$



式中, d 为常数向量; $\hat{G}_i(s) (i=1,2,\dots,q)$ 为不可约分的严格有理真分式 (即分母阶次大于分子阶次) 函数。通常 $\hat{G}_1(s)$, $\hat{G}_2(s)$, $\dots, \hat{G}_q(s)$ 的特性并不相同, 具有不同的分母, 设最小公分母为: $D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$

$$\hat{G}(s) \text{ 的一般形式为 } G(s) = \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} \beta_{1,n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_{11}s + \beta_{10} \\ \beta_{2,n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_{21}s + \beta_{20} \\ \vdots \\ \beta_{q,n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_{q1}s + \beta_{q0} \end{bmatrix}$$

将 $\hat{G}(s)$ 作串联分解并引入中间变量 Z , 令 $Z(s) = U(s)/D(s)$, $x_1 = z, x_2 = \dot{z}, \dots, x_n = z^{(n-1)}$

若将 A 阵写为友矩阵, 便可得到可控标准型实现的状态方程:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + bu$$

每个子系统的输出方程 :

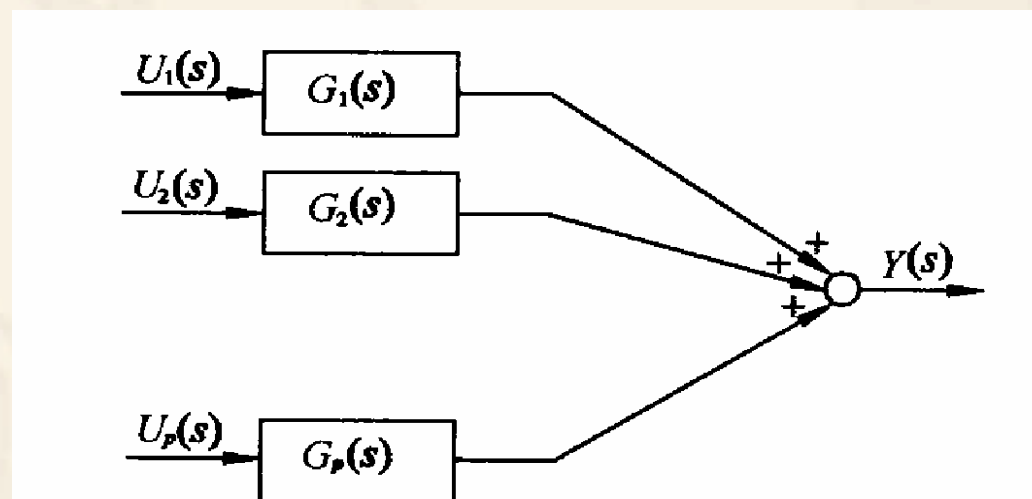


每个子系统的输出方程：

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{10} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \beta_{20} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{q0} & \beta_{q1} & \cdots & \beta_{q,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_q \end{bmatrix} u = Cx + du$$

可以看到，单输入， q 维输出系统的输入矩阵为 q 维列向量，输出矩阵为 $(q \times n)$ 矩阵，故不存在其对偶形式，即不存在可观测标准型实现。

2) MISO系统的实现：



多输入—单输出系统结构图

系统由 p 个独立子系统组成，系统输出由子系统输出合成为：



$$Y(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s) + \cdots + G_p(s)U_p(s)$$

$$= \begin{bmatrix} G_1(s) & G_2(s) & \cdots & G_p(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_p(s) \end{bmatrix} = G(s)U(s)$$

式中 $G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) & G_2(s) & \cdots & G_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + \hat{G}_1(s) & d_2 + \hat{G}_2(s) & \cdots & d_p + \hat{G}_p(s) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G}_1(s) & \hat{G}_2(s) & \cdots & \hat{G}_p(s) \end{bmatrix} = d + \hat{G}(s)$$

同理设 $\hat{G}_1(s), \hat{G}_2(s), \dots, \hat{G}_p(s)$ 的最小公分母为 $D(s)$ ，则

$$G(s) = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_p \end{bmatrix} + \frac{1}{D(s)} [\beta_{1,n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_{11}s + \beta_{10} \cdots \beta_{p,n-1}s + \cdots + \beta_{p1}s + \beta_{p0}]$$

若将A阵写成友矩阵的转置形式，便可得到可观测标准型实现的动态方程：

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{10} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{p0} \\ \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{p1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1,n-1} & \beta_{2,n-1} & \cdots & \beta_{p,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_p \end{bmatrix} u = cx + du$$



可见， p 维输入，单输入系统的输入矩阵为 $(n \times p)$ 矩阵输出矩阵为一行矩阵，故不存在其对偶形式，即不存在可控标准型实现。

例1-7 已知单输入-多输出系统的传递函数矩阵为 $G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s+4}{s+1} \end{bmatrix}$ ，求其传递矩阵的可控标准型实现及对角型实现。

解 由于系统是单输入，多输出的，故输入矩阵只有一列，输出矩阵有两行。将 $G(s)$ 化为严格有理真分式

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ 1 + \frac{3}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{3}{s+1} \end{bmatrix} = d + \hat{G}(s)$$

$\hat{G}(s)$ 各元素的最小公分母 $D(s)$ 为 $D(s) = (s+1)(s+2)$

$$\text{故 } G(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 \\ 3(s+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 \\ 3s+6 \end{bmatrix}$$

则可控标准型动态方程为：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= Cx + du = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$



由 $D(s)=0$ 可确定系统极点为 $-1, -2$ ，它们构成对角形状态矩阵的元素。鉴于输入矩阵只有一列，这里不能选取极点的留数来构成输入矩阵，而只能取元素全为1的输入矩阵。于是，对角型实现的状态方程为：

$$\dot{x} = Ax + bu = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

其输出矩阵由极点对应的留数组成， $\hat{G}(s)$ 在 $-1, -2$ 处的留数分别为：

$$c_1 = \hat{G}(s)(s+1)\big|_{s=-1} = \left\{ \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} s+3 \\ 3(s+2) \end{bmatrix} \right\}_{s=-1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = \hat{G}(s)(s+2)\big|_{s=-2} = \left\{ \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} s+3 \\ 3(s+2) \end{bmatrix} \right\}_{s=-2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故其输出方程为

$$y = Cx + du = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x + du$$



❖ 本章作业：8—3，8—4，8—5，8—7



第二章 线性系统的运动分析

- ❖ 2.1 线性定常连续系统的自由运动
- ❖ 2.2 状态转移矩阵的性质
- ❖ 2.3 线性定常连续系统的受控运动
- ❖ 2.4 线性定常离散系统的分析
- ❖ 2.5 连续系统的离散化



2.1 线性定常连续系统的自由运动

首页

跳转

退出

在控制 $u=0$ 情况下，线性定常系统由初始条件引起的运动称为线性定常系统的自由运动，可由齐次状态方程描述： $\dot{x}(t) = Ax(t)$

齐次状态方程求解方法：幂级数法、拉普拉斯变换法和凯莱—哈密顿定理法。

1) 幂级数法：设齐次方程的解是 t 的向量幂级数 $x(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_kt^k + \cdots$ 式中， $x, b_0, b_1, \cdots, b_k, \cdots$ 都是 n 维向量，且 $x(0) = b_0$ ，求导并考虑状态方程，得

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2t + \cdots + kb_kt^{k-1} + \cdots = A(b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_kt^k + \cdots)$$

$$b_1 = Ab_0$$

$$b_2 = \frac{1}{2} Ab_1 = \frac{1}{2} A^2 b_0$$

$$b_3 = \frac{1}{3} Ab_2 = \frac{1}{6} A^3 b_0$$

$\vdots$

$$b_k = \frac{1}{k} Ab_{k-1} = \frac{1}{k!} A^k b_0$$

$\vdots$

等号两边对应的系数相等，有



故
$$x(t) = (I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots) x(0)$$

定义
$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

则
$$x(t) = e^{At} x(0)$$

e^{At} 称为矩阵指数函数，简称矩阵指数，又称为状态转移矩阵，记为： $\Phi(t) = e^{At}$
求解齐次状态方程的问题，核心就是计算状态转移矩阵的问题。

2) 拉普拉斯变换法：

对 $\dot{x}(t) = Ax(t)$ 进行拉氏变换，有： $X(s) = (sI - A)^{-1} x(0)$ 进行拉氏反变换，有：

$x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] x(0)$ 与 $x(t) = e^{At} x(0)$ 相比有： $e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$
它是 e^{At} 的闭合形式。

例 2-1 设系统状态方程为
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$
，试用拉氏变换求解。

解

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

状态方程的解为：

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

3) 凯莱—哈密顿定理

矩阵A满足它自己的特征方程。即若设n阶矩阵A的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

则有：

$$f(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0$$



从该定理还可导出以下两个推论：

推论1 矩阵 A 的 $(k \geq n)$ 次幂，可表为 A 的 $(n-1)$ 阶多项式：
$$A^k = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m A^m \quad (k \geq n)$$

推论2 矩阵指数 e^{At} 可表为 A 的 $(n-1)$ 阶多项式，
即：
$$e^{At} = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(t) A^m$$

且各作为时间的函数是线性无关的。

在式推论1中用 A 的特征值替代 A 后等式仍能满足：

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(t) \lambda_i^j$$

利用上式和 k 个就可以确定待定系数 $\alpha_j(t)$ ：

1) 若 λ_i 互不相等：

可写出各所构成的 n 元一次方程组为：

$$\left. \begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_1^{k-1} \\ e^{\lambda_2 t} &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_2^2 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_2^{k-1} \\ &\vdots \\ e^{\lambda_k t} &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_k + \alpha_2 \lambda_k^2 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_k^{k-1} \end{aligned} \right\}$$



求解上式，可求得系数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ ，它们都是时间 t 的函数，将其代入推论2式后即可得出 e^{At} 。

例2-2 已知 $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ，求 e^{At} 。

解 首先求 A 的特征值：

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$$

$$\longrightarrow \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -4$$

将其代入 $e^{\lambda_i t} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(t) \lambda_i^j$ ，
$$\begin{cases} e^{-t} = \alpha_0 + \alpha_1(-1) \\ e^{-4t} = \alpha_0 + \alpha_1(-4) \end{cases}$$

有：

$$\longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t} \\ \alpha_1 = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t} \end{cases} \longrightarrow e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

$$= \left(\frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t} \right) \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$





$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t} \\ \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t} & \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

2) 若矩阵 A 的特征值是 m 阶的:

则求解各系数的方程组的前 m 个方程可以写成:

$$e^{\lambda_1 t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_1^{k-1}$$

$$\left. \frac{d}{d\alpha} e^{\lambda t} \right|_{\lambda=\lambda_1} = \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_1 + \cdots + (k-1)\alpha_{k-1} \lambda_1^{k-2}$$

$\vdots$

$$\left. \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} e^{\lambda t} \right|_{\lambda=\lambda_1} = (m-1)!\alpha_{m-1} + m!\alpha_m \lambda_1 + \frac{(m+1)!}{2!} \alpha_{m+1} \lambda_1^2 + \cdots + \frac{(k-1)!}{(k-m)!} \alpha_{k-1} \lambda_1^{k-m}$$

其它由 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, k - m + 1)$ 组成的 $(k - m)$ 个方程仍与第一种情况相同, 它们上式联立即可解出各待定系数。



例2-3 已知 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, 求 e^{At} 。

解 先求矩阵 A 的特征值, 由得: $\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \Rightarrow \begin{cases} e^{-2t} = \alpha_0 + \alpha_1(-2) \\ te^{-2t} = \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0(t) = e^{-2t}(1 + 2t) \\ \alpha_1(t) = te^{-2t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{-2t}(1 + 2t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{-2t} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}$$



2.2 状态转移矩阵的性质

状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 具有如下运算性质:

1) $\Phi(0) = I$

2) $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A$

表明 $A\Phi(t)$ 与 $\Phi(t)A$ 可交换, 且 $\dot{\Phi}(0) = A$

3) $\Phi(t_1 - t_2) = \Phi(t_1)\Phi(\pm t_2) = \Phi(\pm t_2)\Phi(t_1)$

在式 3) 中, 令 $t = t_1 \pm t_2$ 便可证明; 表明 $\Phi(t_1 \pm t_2)$ 可分解为 $\Phi(t_1)$ 与 $\Phi(\pm t_2)$ 的乘积, 且 $\Phi(t_1)$ 与 $\Phi(\pm t_2)$ 是可交换的。

4) $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t), \Phi^{-1}(-t) = \Phi(t)$

证明: 由性质 3) 有 $\Phi(t-t) = \Phi(t)\Phi(-t) = \Phi(-t)\Phi(t) = \Phi(0) = I$

根据 $\Phi(t)$ 的这一性质,

对于线性定常系统, 显然有 $x(t) = \Phi(t)x(0), x(0) = \Phi^{-1}(t)x(t) = \Phi(-t)x(t)$

5) $x(t_2) = \Phi(t_2 - t_1)x(t_1)$

证明: 由于 $x(t_1) = \Phi(t_1)x(0), x(0) = \Phi^{-1}(t_1)x(t_1) = \Phi(-t_1)x(t_1)$

则 $x(t_2) = \Phi(t_2)x(0) = \Phi(t_2)\Phi(-t_1)x(t_1) = \Phi(t_2 - t_1)x(t_1)$

即由 $x(t_1)$ 转移至 $x(t_2)$ 的状态转移矩阵为 $\Phi(t_2 - t_1)$



6) $\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1) \Phi(t_1 - t_0)$

证明：由 $x(t_2) = \Phi(t_2 - t_0)x(t_0)$ 和 $x(t_1) = \Phi(t_1 - t_0)x(t_0)$

得到 $x(t_2) = \Phi(t_2 - t_1)x(t_1) = \Phi(t_1 - t_0) \Phi(t_2 - t_1) x(t_0) = \Phi(t_2 - t_0) x(t_0)$

7) $[\Phi(t)]^k = \Phi(kt)$

证明： $[\Phi(t)]^k = (e^{At})^k = e^{kAt} = e^{A(kt)} = \Phi(kt)$

8) 若 $AB = BA$ ，则 $e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt} = e^{Bt} e^{At}$

9) 若 $\bar{A} = P^{-1}AP$ ，则 $\bar{\Phi}(t) = e^{\bar{A}t} = P^{-1}e^{At}P = P^{-1}\Phi(t)P$

例2-4 已知状态转移矩阵为 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$ ，试求 $\Phi^{-1}(t), A$ 。

解： 根据状态转移矩阵的运算性质有

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$A = \dot{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$



2.3 线性定常连续系统的受控运动

首页

跳转

退出

线性定常系统的受控运动: 线性定常系统在控制作用下的运动, 数学描述为:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

主要有如下两种解法:

1) 积分法 由上式 $e^{-At}(\dot{x}(t) - Ax(t)) = e^{-At}Bu(t)$

$$\text{由于 } \frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)]$$

$$\text{积分后有 } e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\text{即 } x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

式中, 第一项为零输入响应; 第二项是零状态响应。通过变量代换, 上式又可表示为:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau$$

若取 t_0 作为初始时刻, 则有

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$



2) 拉普拉斯变换法 将 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ 式两端取拉氏变换, 有

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

进行拉氏反变换有 $x(t) = L^{-1}(sI - A)^{-1} x(0) + L^{-1}[(sI - A)^{-1} BU(s)]$

例2-5 设系统状态方程为 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ 且 $x(0) = [x_1(0) \ x_2(0)]^T$

试求在 $u(t) = 1(t)$ 作用下状态方程的解。

解 由于 $u(t) = 1(t)$ $u(t - \tau) = 1$

➡
$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau) B u(\tau) d\tau$$

前面已求得
$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

➡
$$\int_0^t \Phi(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} - e^{-2\tau} \\ -e^{-\tau} + 2e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -e^{-\tau} + \frac{1}{2}e^{-2\tau} \\ e^{-\tau} - e^{-2\tau} \end{bmatrix} \bigg|_0^t = \begin{bmatrix} -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \int_0^t \Phi(\tau) d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} - e^{-2\tau} \\ -e^{-\tau} + 2e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} e^{-\tau} - e^{-2\tau} \\ -e^{-\tau} + 2e^{-2\tau} \end{bmatrix} \Big|_0^t = \begin{bmatrix} -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$



2.4 线性定常离散系统的分析

1) 递推法(线性定常系统)

重写系统的动态方程如下: $x(k+1) = \Phi x(k) + Gu(k)$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

令状态方程中的 $k=0, 1, \dots, k-1$, 可得到 $T, 2T, \dots, kT$ 时刻的状态, 即:

$$k=0: x(1) = \Phi(T)x(0) + G(T)u(0)$$

$$k=1: x(2) = \Phi(T)x(1) + G(T)u(1) = \Phi^2(T)x(0) + \Phi(T)G(T)u(0) + G(T)u(1)$$

$$k=2: x(3) = \Phi(T)x(2) + G(T)u(2) \\ = \Phi^3(T)x(0) + \Phi^2(T)G(T)u(0) + \Phi(T)G(T)u(1) + G(T)u(2)$$

$$k=k-1: x(k) = \Phi(T)x(k-1) + G(T)u(k-1) = \Phi^k(T)x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-1-i}(T)G(T)u(i)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) = C\Phi^k(T)x(0) + C\sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-1-i}(T)G(T)u(i) + Du(k)$$

于是, 系统解为:

$$x(k) = \Phi^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-1-i} G u(i)$$

$$y(k) = C\Phi^k x(0) + C\sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-1-i} G u(i) + Du(k)$$



2.5 连续系统的离散化

[首页](#)[跳转](#)[退出](#)

2.5.1 线性定常连续系统的离散化

已知线性定常连续系统状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu$ 在 $x(t_0)$ 及 $u(t)$ 作用下的解为:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau$$

令 $t_0 = kT$, 则 $x(t_0) = x(k\tau) = x(k)$; 令 $t = (k+1)T$

则 $x(t) = x[(k+1)T] = x(k+1)$

并假定在 $t \in [k, k+1]$ 区间内, $u(t) = u(kt) = \text{常数}$, 于是其解化为

$$x(k+1) = \Phi[(k+1)T, kT]x(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau]Bd\tau \cdot u(k)$$

若记 $G(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau]Bd\tau$

变量代换得到 $G(T) = \int_0^T \Phi(\tau)Bd\tau$

故离散化状态方程为 $x(k+1) = \Phi(T)x(k) + G(T)u(k)$

式中, $\Phi(T)$ 与连续状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的关系为 $\Phi(T) = \Phi(t)|_{t=T}$



2.5.2 非线性时变系统的离散化及分析方法

对于非线性时变系统，常采用近似的离散化处理方法。当采样周期 T 足够小时，按导数定义有

$$\dot{x}(k) \approx \frac{1}{T}[x(k+1) - x(k)]$$

代入（8-5a）得到离散化状态方程

$$x(k+1) = x(k) + Tf[x(k), u(k)]$$

对于非线性时变系统，一般都是先离散化，然后再用递推计算求数值解的方法进行系统的运动分析。

❖ 本章作业： 8—8， 8—9， 8—11



第三章 控制系统的李雅普诺夫稳定性分析

- ❖ 3.1 李雅普诺夫稳定性概念
- ❖ 3.2 李雅普诺夫稳定性间接判别法
- ❖ 3.3 李雅普诺夫稳定性直接判别法
- ❖ 3.4 线性定常系统的李雅普诺夫稳定性分析



3.1 李雅普诺夫稳定性概念

首页

跳转

退出

1) 平衡状态: 如果对于所有 t , 满足 $\dot{x}_e = f(x_e, t) = 0$ 的状态 $\dot{x}_e$ 称为平衡状态 (平衡点)。

- (1) 只有状态稳定, 输出必然稳定;
- (2) 稳定性与输入无关。

平衡状态的各分量不再随时间变化; 若已知状态方程, 令 $\dot{x} = 0$ 所求得的解 x , 便是平衡状态。

2) 李雅普诺夫稳定性定义:

如果对于任意小的 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 当初始状态 $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ 时, 系统运动轨迹满足 $\|x(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \varepsilon$, 则称该平衡状态 x_e 是李雅普诺夫意义下稳定的, 简称是稳定的。

$\|x_0 - x_e\|$ 表示状态空间中 x_0 点至 x_e 点之间的距离, 其数学表达式为:

$$\|x_0 - x_e\| = \sqrt{(x_{10} - x_{1e})^2 + \cdots + (x_{n0} - x_{ne})^2}$$

3) 一致稳定性:

通常 δ 与 ε 、 t_0 都有关。如果 δ 与 t_0 无关, 则称平衡状态是一致稳定的。定常系统的 δ 与 t_0 无关, 因此定常系统如果稳定, 则一定是一致稳定的。



4) 渐近稳定性:

系统的平衡状态不仅具有李雅普若夫意义下的稳定性, 且有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0, t_0) - x_e\| \rightarrow 0$$

称此平衡状态是渐近稳定的。

5) 大范围稳定性:

当初始条件扩展至整个状态空间, 且具有稳定性时, 称此平衡状态是大范围稳定的, 或全局稳定的。

此时 $\delta \rightarrow \infty, S(\delta) \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$ 。

6) 不稳定性 :

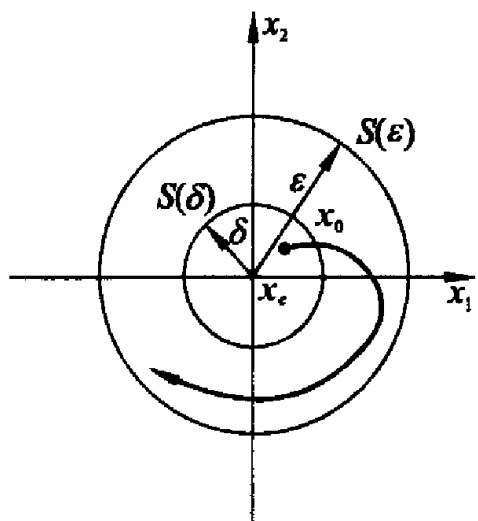
不论 δ 取得得多么小, 只要在 $S(\delta)$ 内有一条从 x_0 出发的轨迹跨出 $S(\varepsilon)$, 则称此平衡状态是不稳定的。

注意: 按李雅普诺夫意义下的稳定性定义, 当系统作不衰减的振荡运动时则认为是稳定的, 同经典控制理论中的稳定性定义是有差异的。经典控制理论的稳定是李雅普诺夫意义下的一致渐近稳定。

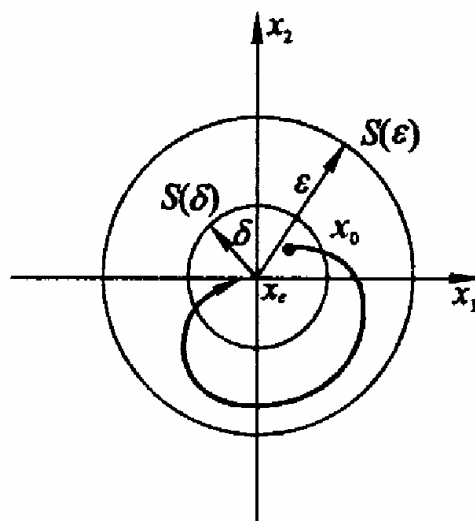


稳定性定义的平面几何表示

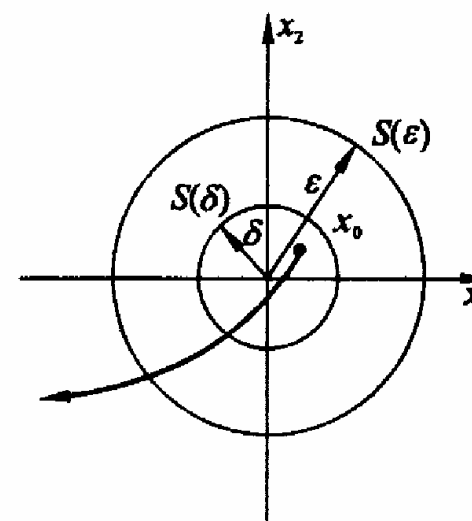
- ❖ 设系统初始状态 x_0 位于平衡状态 x_e 为球心、半径为 δ 的闭球域内，如果系统稳定，则状态方程的解在的过程中，都位于以 x_e 为球心，半径为 ε 的闭球域内。



(a) 李雅普诺夫意义下的稳定性



(b) 渐近稳定性



(c) 不稳定性

3.2 李雅普诺夫稳定性间接判别法

首页

跳转

退出

李雅普诺夫第一法（间接法） 是利用状态方程解的特性来判断系统稳定性的方法，它适用于线性定常、线性时变及可线性化的非线性系统。

线性定常系统的特征值判据 系统 $\dot{x} = Ax$ 渐近稳定的充要条件是：系统矩阵A的全部特征值位于复平面左半部，即 $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \quad i = 1, \dots, n$

证明：（略）



3.3 李雅普诺夫稳定性直接判别法

首页

跳转

退出

李雅普诺夫第二法（直接法）基本原理：根据物理学原理，若系统贮存的能量（含动能与位能）随时间推移而衰减，系统迟早会到达平衡状态。

实际系统的能量函数表达式相当难找，因此李雅普诺夫引入了广义能量函数，称之为李雅普诺夫函数。它与 $x_1, \dots, x_n$ 及 t 有关，是一个标量函数，记以 $V(x, t)$ ；若不显含 t ，则记以 $V(x)$ 。

考虑到能量总大于零，故为正定函数。能量衰减特性用 $V(x, t)$ 或 $V(x)$ 表示。

实践表明，对于大多数系统，可先尝试用二次型函数 $x^T P x$ 作为李雅普诺夫函数。



3.3.1 标量函数定号性

正定性：标量函数 $V(x)$ 在域 S 中对所有非零状态 ($x \neq 0$) 有 $V(x) > 0$ 且 $V(0) = 0$ ，则称 $V(x)$ 均在域 S 内正定。如 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ 是正定的。

负定性：标量函数 $V(x)$ 在域 S 中对所有非零 x 有 $V(x) < 0$ 且 $V(0) = 0$ ，则称 $V(x)$ 在域 S 内负定。如 $V(x) = -(x_1^2 + x_2^2)$ 是负定的。

如果 $V(x)$ 是负定的，则 $-V(x)$ 一定是正定的。

负（正）半定性： $V(0) = 0$ ，且 $V(x)$ 在域 S 内某些状态处有 $V(x) = 0$ 而其它状态处均有 $V(x) < 0$ ($V(x) > 0$)，则称 $V(x)$ 在域 S 内负（正）半定。

设 $V(x)$ 为负半定，则 $-V(x)$ 为正半定。如 $V(x) = -(x_1 + 2x_2)^2$ 为正半定

不定性： $V(x)$ 在域 S 内可正可负，则称 $V(x)$ 不定。如 $V(x) = x_1 x_2$ 是不定的。

二次型函数 是一类重要的标量函数，记

$$V(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

其中， P 为对称矩阵，有 $p_{ij} = p_{ji}$ 。



当的各顺序主子行列式均大于零时，即 $p_{11} > 0, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$

则 $V(x)$ 正定，且称 P 为正定矩阵。当 P 的各顺序主子行列式负、正相间时，即

$$p_{11} < 0, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

则 $V(x)$ 负定，且称 P 为负定矩阵。若主子行列式含有等于零的情况，则 $V(x)$ 为正半定或负半定。不属以上所有情况的 $V(x)$ 不定。



3.3.2 李雅普诺夫第二法诸稳定性定理

设系统状态方程为 $\dot{x} = f(x, t)$ ，其平衡状态满足 $f(0, t) = 0$ ，不失一般性地把状态空间原点作为平衡状态，并设在原点邻域存在 $V(x, t)$ 对 x 的连续一阶偏导数。

定理1 若 (1) $V(x, t)$ 正定， $\dot{V}(x, t)$ 负定；则原点是渐近稳定

(2) $\dot{V}(x, t)$ 负定表示能量随时间连续单调地衰减，故与渐近稳定性定义叙述一致。

定理2 若 (1) $V(x, t)$ 正定；(2) $\dot{V}(x, t)$ 负半定，且在非零状态不恒为零；则原点是渐近稳定的。

$\dot{V}(x, t)$ 负半定表示在非零状态存在 $\dot{V}(x, t) \equiv 0$ ，但在从初态出发的轨迹 $x(t; x_0, t_0)$ 上，不存在 $V(x, t) \equiv 0$ 的情况，于是系统将运行至原点。状态轨迹仅是经历能量不变的状态，而不会维持在该状态。

定理3 若 (1) $V(x, t)$ 正定；(2) $\dot{V}(x, t)$ 负半定，且在非零状态恒为零；则原点是李雅普诺夫意义下稳定的。

沿状态轨迹能维持 $V(x, t) \equiv 0$ ，表示系统能维持等能量水平运行，使系统维持在非零状态而不运行至原点。

定理4 若 (1) $V(x, t)$ 正定；(2) $\dot{V}(x, t)$ 正定；则原点是不稳定的。

$\dot{V}(x, t)$ 正定表示能量函数随时间增大，故状态轨迹在原点邻域发散。

参考定理2可推论： $V(x, t)$ 正定，当 $\dot{V}(x, t)$ 正半定，且在非零状态不恒为零时，则原点不稳定。



注意：李雅普诺夫第二法诸稳定性定理所述条件都是充分条件。

具体分析时，先构造一个李雅普诺夫函数 $V(x,t)$ ，通常选二次型函数，求其导数 $\dot{V}(x,t)$ 再将状态方程代入，最后根据 $\dot{V}(x,t)$ 的定号性判别稳定性。

判断在非零状态下 $V[x(t; x_0, t_0), t]$ 是否有恒为零：令 $\dot{V}(x,t) \equiv 0$

将状态方程代入，若能导出非零解，表示对 $x \neq 0$ ， $\dot{V}(x,t) \equiv 0$ 的条件是成立的；若导出的是全零解，表示只有原点满足 $\dot{V}(x,t) \equiv 0$ 的条件。

例3-1 试用李雅普诺夫第二法判断下列非线性系统的稳定性。

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

解 令 $\dot{x}_1 = 0$ 及 $\dot{x}_2 = 0$ ，可以解得原点 $(x_2 = 0, x_1 = 0)$ 是系统的唯一平衡状态。

取李雅普诺夫函数为 $V(x) = (x_1^2 + x_2^2)$ ，则 $\dot{V}(x) = -2(x_1^2 + x_2^2)$

将状态方程代入有 $\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$

显然 $\dot{V}(x,t)$ 负定，根据定理1，原点是渐近稳定的。鉴于只有一个平衡状态，该非线性系统是大范围渐近稳定的。因 $V(x,t)$ 与 t 无关，系统大范围一致渐近稳定。



例3-2 试判断下列线性系统平衡状态的稳定性。

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2$$

解 令 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ 得知原点是唯一的平衡状态。选 $V(x) = 2x_1^2 + x_2^2$ 则 $\dot{V}(x) = 2x_2(x_1 - x_2)$
 当 $x_1 > x_2 > 0$ 时, $\dot{V}(x) > 0$; 当 $x_2 > x_1 > 0$ 时, $\dot{V}(x) < 0$

故 $\dot{V}(x)$ 不定, 不能对稳定性作出判断, 应重选 $V(x, t)$

选 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, 则考虑状态方程后得 $\dot{V}(x) = -2x_2^2$ 对于非零状态 (如 $x_2 = 0, x_1 \neq 0$) 存在 $\dot{V}(x) = 0$, 对于其余非零状态, $\dot{V}(x) < 0$, 故 $\dot{V}(x)$ 负半定。

根据定理2, 原点是渐近稳定的, 且是大范围一致渐近稳定。

例3-3 试判断下列线性系统平衡状态的稳定性。

$$\dot{x}_1 = kx_2 (k > 0), \quad \dot{x}_2 = -x_1$$

解 由 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ 可知原点是唯一平衡状态。选 $V(x) = x_1^2 + kx_2^2$, 考虑状态方程则有

$$\dot{V}(x) = 2kx_1x_2 - 2kx_2x_1 = 0$$

对所有状态, $\dot{V}(x) = 0$, 故系统是李雅普诺夫意义下稳定的。



例3-4 试判断下列线性系统平衡状态的稳定性。

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2$$

解 原点是唯一平衡状态。选 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ，则 $\dot{V}(x) = 2x_2^2$ ， $\dot{V}(x)$ 与 x_1 无关，故存在非零状态（如 $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ ）使 $\dot{V}(x) = 0$ 而对其余任意状态有 $\dot{V}(x) > 0$ ，故 $\dot{V}(x)$ 正半定。根据定理4的推论，系统不稳定。

例3-5 试判断下列线性系统平衡状态的稳定性。

$$\dot{z}_1 = z_2 - 1, \quad \dot{z}_2 = -z_1 - z_2 + 2$$

解 $z_1 = z_2 = 1$ 是系统的唯一平衡状态，方程中的常数项可以看作是阶跃输入作用的结果。作坐标变换 $x_1 = z_1 - 1 \quad x_2 = z_2 - 1$ 得到 $\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2$ 原状态方程在 z 状态空间 $(1, 1)$ 处稳定性判别问题就变成变换后状态方程在 x 状态空间原点处稳定性的判别问题。

选 $V(x) = x_1^2 + kx_2^2$ 对其求导考虑状态方程得到 $\dot{V}(x) = 2x_1^2 + x_2^2 = -2x_2^2$ 系统原点是大范围一致渐近稳定的，因而原系统在平衡状态 $(1, 1)$ 处是大范围一致渐近稳定的。

注意：一般不能用李雅普诺夫函数去直接判别非原点的平衡状态稳定性。



例3-6 试判断下列非线性系统平衡状态的稳定性。

$$\dot{x} = ax + x^2$$

解 这实际上是一个可线性化的非线性系统的典型例子。令 $\dot{x} = 0$

得知系统有两个平衡状态, $x=0$ 和 $x=-a$

对位于原点的平衡状态, 选 $V(x) = x^2$ 有 $\dot{V}(x) = 2ax^2 + 2x^3 = 2x^2(a+x)$

于是, 当 $a < 0$ 时, 系统在原点处的平衡状态是局部 ($x < -a$) 一致渐近稳定的。

根据定理4, 当 $a > 0$ 时原点显然是不稳定的

当 $a=0$ 时原点也是不稳定的 $x > 0, \dot{V}(x) > 0$ 或系统发散, 也可以

从状态方程直接看出。

对于平衡状态 $x=-a$, 作坐标变换 $z = x + a$, 得到新的状态方程

$$\dot{z} = -az + z^2$$

因此, 通过与原状态方程对比可以断定: 对于原系统在状态空间 $x=-a$

处的平衡状态, 当 $a > 0$ 时是局部一致渐近稳定的; 当 $a < 0$ 时是不稳定的, 当 $a = 0$ 时也是不稳定的。



3.4 线性定常系统的李雅普诺夫稳定性分析

[首页](#)[跳转](#)[退出](#)

3.4.1 连续系统渐近稳定的判别

设系统状态方程为 $\dot{x} = Ax$ ， A 为非奇异矩阵，故原点是唯一平衡状态。可以取下列正定二次型函数 $V(x)$ 作为李雅普诺夫函数 $V(x) = x^T P x$ 求导并考虑状态方程 $\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + AP)x$

$$\text{令 } A^T P + AP = -Q \quad (\times)$$

$$\text{得到 } \dot{V}(x) = -x^T Q x \quad (\#)$$

根据定理1，只要 Q 正定（即 $\dot{V}(x)$ 负定）则系统是大范围一致渐近稳定的。于是线性定常连续系统渐近稳定的判定条件可表示为：给定一正定矩阵 P ，存在满足(#)式的正定矩阵 Q 。

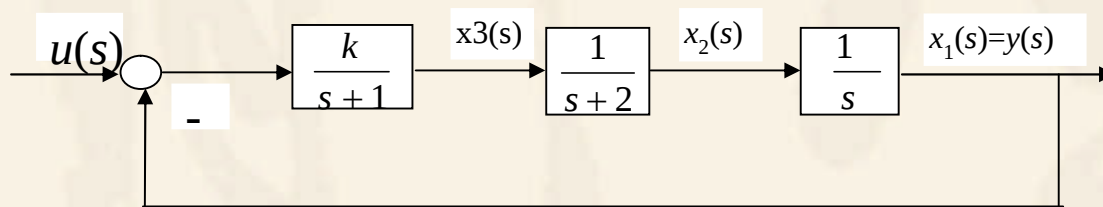
注：先指定正定的 Q 阵，然后验证 P 阵是否正定。



定理5（证明从略）系统 $\dot{x} = Ax$ 渐近稳定的充要条件为：给定正定实对称矩阵 Q ，存在正定实对称矩阵 P 使 $(\times)$ 式成立。

该定理为系统的渐近稳定性判断带来实用上的极大方便。

例3-7 试用李雅普诺夫方程确定使图所示系统渐近稳定的 K 值范围。



例3-7 系统框图

解 由图示状态变量列写状态方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u$$

稳定性与输入无关，可令 $u=0$ 。由于 $\det A = -K \neq 0$ ， A 非奇异，原点为唯一的平衡状态。取 Q 为正半定矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $\dot{V}(x) = -x^T Q x = -x_3^2$ ， $\dot{V}(x)$ 负半定。令 $\dot{V}(x) \equiv 0$ ，有 $x_3 \equiv 0$ ，考虑状态方程中 $\dot{x}_3 = -Kx_1 - x_3$ ，解得 $x_1 \equiv 0$ ；考虑到 $\dot{x}_1 = x_2$ ，解得 $x_2 \equiv 0$ ，表明唯有原点存在 $\dot{V}(x) \equiv 0$



令 $A^T P + PA = -Q$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

展开的代数方程为6个，即

$$-2Kp_{13} = 0, \quad -Kp_{23} + p_{11} - 2p_{12} = 0, \quad -Kp_{33} + p_{12} - p_{13} = 0$$

$$2p_{12} - 4p_{22} = 0, \quad p_{13} - 3p_{23} + p_{22} = 0, \quad 2p_{23} - 2p_{33} = 0$$

解得 $P = \begin{bmatrix} \frac{K^2 + 12K}{12 - 12K} & \frac{6K}{12 - 2K} & 0 \\ \frac{6K}{12 - 2K} & \frac{3K}{12 - 2K} & \frac{K}{12 - 2K} \\ 0 & \frac{K}{12 - 2K} & \frac{6K}{12 - 2K} \end{bmatrix}$

使 P 正定的条件为: $12 - 2K > 0$ 及 $K > 0$ 。故 $0 < K < 6$ 时，系统渐近稳定。由于是线性定常系统，系统大范围一致渐近稳定。



3.4.2 离散系统渐近稳定的判别

设系统状态方程为 $x(k+1) = \phi x(k)$ ，式中 ϕ 阵非奇异，原点是平衡状态。

取正定二次型函数 $V[x(k)] = x^T(k)Px(k)$

以 $\Delta V[x(k)]$ 代替 $\dot{V}(x)$ ，有 $\Delta V[x(k)] = V[x(k+1)] - V[x(k)]$

$$\begin{aligned} \text{考虑状态方程，有 } \Delta V[x(k)] &= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) \\ &= [\phi x(k)]^T P x(k+1) P x(k+1) - x^T(k)Px(k) \\ &= x^T(k)[\phi^T P \phi - P]x(k) \end{aligned}$$

$$\text{令 } \phi^T P \phi - P = -Q \quad (\#)$$

(#) 式称为李雅普诺夫代数方程。 $x^T(k)Px(k)$ 是系统的一个李雅普诺夫函数，于是

$$\Delta V[x(k)] = -x^T(k)Qx(k)$$

定理7 系统 $x(k+1) = \phi x(k)$ 渐近稳定的充要条件是：给定任一正定实对称矩阵 Q (常 $Q = I$)，存在正定对称矩阵 P ，使 (#) 式成立。



❖本章作业： 8—14， 8—15



首页

跳转

退出

线性系统的可控性和可观测性



4.1 可控性和可观测性的概念

4.2 线性定常系统的可控

4.3 线性定常系统的可观测

4.4 可控性,可观测性与传递函数矩阵的关

4.5 连续系统离散化后的可控性与可观测

返



第四章 线性系统的可控性和可观测性

§ 4.1 可控性和可观测性的概念

可控性

如果系统所有状态变量的运动都可以通过有限点的控制输入来使其由任意的初态达到任意设定的终态，则称系统是可控的，更确切的说是状态可控的；否则，就称系统是不完全可控的，简称为系统不可控。

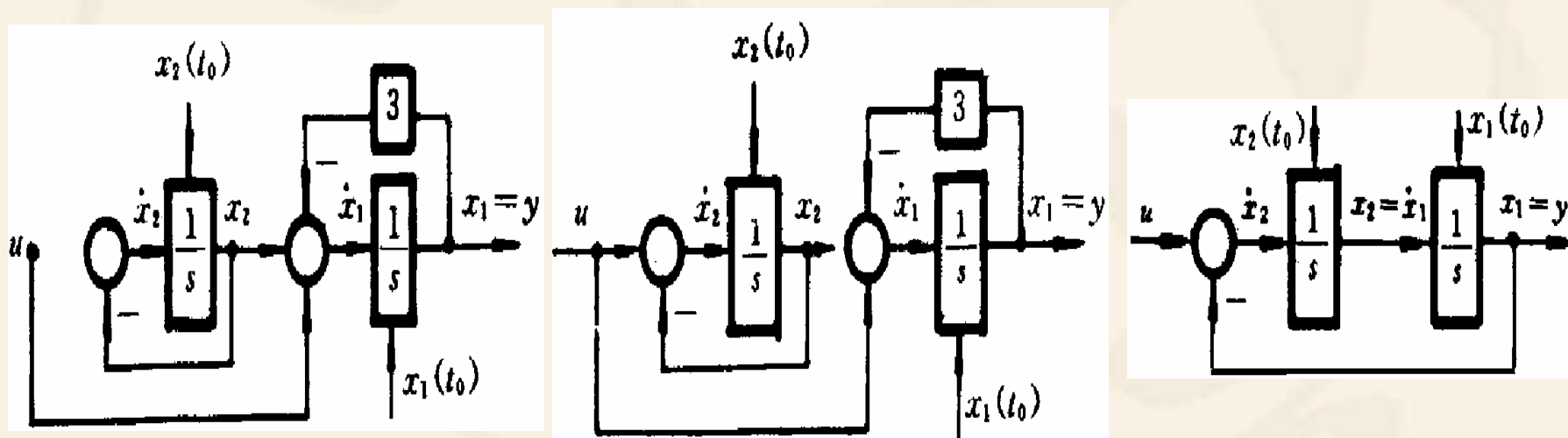
可观性

如果系统所有的状态变量任意形式的运动均可由有限点的输出测量完全确定出来，则称系统是可观测的，简称为系统可观测；反之，则称系统是不完全可观测的，简称为系统不可观测。

可控性与可观测性的概念，是用状态空间描述系统引伸出来的新概念，在现代控制理论中起着重要的作用。可控性、可观测性与稳定性是现代控制系统的三大基本特性。



下面举几个例子直观地说明系统的可控性和可观测性。



上图所示的结构图，其中左图显见 x_1 受 u 的控制，但 x_2 与 u 无关，故系统不可控。系统输出量 $y = x_1$ ，但 x_1 是受 x_2 影响的， y 能间接获得 x_2 的信息，故系统是可观测的。中图中的 x_1 、 x_2 均受 u 的控制，故系统可控，但 y 与 x_2 无关，故系统不可观测。又图中的 x_1 、 x_2 均受 u 的控制，且在 y 中均能观测到 x_1 、 x_2 故系统是可控可观测的。

只有少数简单的系统可以从结构图或信号流图直接判别系统的可控性与可观测性，如果系统结构、参数复杂，就只能借助于数学方法进行分析与研究，才能得到正确的结论。



§ 4.2 线性定常系统的可控性

可控性分为状态可控性和输出可控性，若不特别指明，一般指状态可控性。状态可控性只与状态方程有关，与输出方程无关。

§ 4.2.1 离散系统的可控性

(1) 单输入离散系统

为导出系统可控性的条件，设单输入系统状态方程为

$$x(k+1) = \Phi x(k) + gu(k)$$

其解为

$$x(k) = \Phi^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-1-i} gu(i)$$

定义

$$\Delta x = x(n) - \Phi^n x(0)$$

由于 $x(0)$ 和 $x(n)$ 取值都可以是任意的，因此 Δx 的取值也可以是任意的。



$$\Delta x = \Phi^{n-1} g u(0) + \Phi^{n-2} g u(1) + \cdots + \Phi g u(n-1)$$

$$= \begin{bmatrix} g & \Phi g & \cdots & \Phi^n g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

记 $S_1 = \begin{bmatrix} g & \Phi g & \cdots & \Phi^{n-1} g \end{bmatrix}$ (4---1)

则 $\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = S^{-1} \square x = S^{-1} [x(n) - \varphi^n x(0)]$ (4---2)

称 S_1 为可控性矩阵。

式(4---1)是一个非齐次线性方程组, n 个方程中有 n 个未知数 $u(0), \cdots, u(n-1)$

$\text{rank } S_1 = n$ 或 $\det S_1 \neq 0$ 称为可控性判据。此为充要条件。

当 $\text{rank } S_1 < n$ 时, 系统不可控, 表示不存在能使任意 $x(0)$ 转移至任意 $x(n)$ 的控制。



从以上推导看出，状态可控性取决于 Φ 和 g ，当 $u(k)$ 不受约束时，可控系统的状态转移过程至多以 n 个采样周期便可以完成，有时状态转移过程还可能少于 n 个采样周期。

上述过程不仅导出了单输入离散系统可控性条件，而且 (4---1) 还给出了求取控制指令的具体方法。

§ 4.2.1 多输入离散系统

设系统状态方程为 $x(k+1) = \Phi x(k) + Gu(k)$

可控性矩阵为 $S_2 = [G \quad \Phi G \quad \dots \quad \Phi^{n-1}G]$

$$x(0) = -[\Phi^{-1}G \quad \Phi^{-2}G \quad \dots \quad \Phi^{-n}G] \begin{bmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix}$$

多输入线性定常离散系统状态可控的充分必要条件是

$$\text{rank} S_2 = \text{rank}[G \quad \Phi G \dots \Phi^{n-1}G] = n \text{ 或 } \det S_2 S_2^T \neq 0$$



技巧:

首页

跳转

退出

(1) S_2 的行数总小于列数, 在列写 S_2 时, 若能知道 S_2 的秩为 n 便不必把 S_2 的其余列都计算和列写出来。

(2) 利用 $\det S_2 S_2^T \neq 0$ 计算一次 n 阶行列式便可确定可控性。

多输入线性定常离散系统转移过程一般可少于 n 个采样周期。

例8-30 设单输入线性定常离散系统状态方程为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

试判断可控性; 若初始状态 $x(0) = [2 \ 1 \ 0]^T$, 确定使 $x(3) = 0$ 的控制序列

$u(0)$, $u(1)$, $u(2)$; 研究使 $x(2) = 0$ 的可能性。

解 由题意知

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\text{rank } S_1 = \text{rank} [g \ \Phi g \ \Phi^2 g] \quad \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 3 = n \quad \text{故该系统可控。}$$



可按式 (8-90) 求出 $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ 。为了避免矩阵求逆, 下面用递推法来求。

令 $k=0, 1, 2$, 可得状态序列

$$x(1) = \Phi x(0) + gu(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0)$$

$$x(2) = \Phi x(1) + gu(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(1)$$

$$x(3) = \Phi x(2) + gu(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(2)$$

令 $x(3) = 0$, 即解下列方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix}$$



其系数矩阵即可控性矩阵 S_1 ，它的非奇异性可给出如下的解

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix}$$

若令 $x(2) = 0$ ，即解下列方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

容易看出其系数矩阵的秩为2，但增广矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的秩为3，

两个秩不等，方程组无解，意为不能在第二个采样周期内使给定初态转移至原点。若该两个秩相等时，便意味着可用两步完成状态转移。



例8-31 输入线性定常离散系统的状态方程为 $x(k+1) = \Phi x(k) + Gu(k)$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

试判断可控性，设初始状态为 $[-1, 0, 2]^T$ ，研究使 $x(1) = 0$ 的可能性。

解： $S_2 = [G \quad \Phi G \quad \Phi^2 G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

由前三列组成的矩阵的行列式不为零，故该系统可控，一定能求得控制使系统从任意初态在三步内转移到原点。由 $x(1) = \Phi x(0) + Gu(0) = 0$

给出 $x(0) = -\Phi^{-1}Gu(0) = -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}$

设初始状态为 $[-1, 0, 2]^T$



由于 $\text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = 2$

可求得 $u_1(0)=1, u_2(0)=0$ ，在一步内使该初态转移到原点。当初始状态为 $[2 \ 1/2 \ -3]^T$ 时，亦然，只是 $u_1(0)=0, u_2(0)=1$ 。但本例不能对任意初态，使之在一步内转移到原点。

§ 4.2.1 连续系统的可控性

(1) 单输入系统

定义：在有限时间间隔内 $t \in [t_0, t_f]$ ，如果存在无约束的分段连续控制函数 $u(t)$ ，能使系统从任意初态 $x(t_0)$ 转移至任意终态 $x(t_f)$ ，则称该系统是状态完全可控的，简称是可控的。

设状态方程为 $\dot{x} = Ax + bu$

终态解为 $x(t_f) = e^{A(t_f-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}bu(\tau)d\tau$

定义 $\Delta x = x(t_f) - e^{A(t_f-t_0)}x(t_0)$

显然， Δx 的取值也是任意的。于是有 $\Delta x = \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}bu(\tau)d\tau$



利用凯莱-哈密顿定理的推论 $e^{A\tau} = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(\tau) A^m$

有
$$\Delta x = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(\tau) A^m b u(\tau) d\tau = \sum_{m=0}^{n-1} A^m b \left[\int_0^{t_f} \alpha_m(\tau) u(\tau) d\tau \right]$$

令
$$u_m = \int_{t_0}^{t_f} \alpha_m(\tau) u(\tau) d\tau \quad m = 0, 1, \dots, n-1$$

则有

$$x(0) = \sum_{m=0}^{n-1} A^m b u_m = \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

记
$$S_3 = \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

其状态可控的充分必要条件是

$$\text{rank} S_3 = n$$

(2) 多输入系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

记可控性矩阵
$$S_4 = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

状态可控的充要条件为 $\text{rank} S_4 = n$ 或 $\det S_4 S_4^T \neq 0$



例8-32 试用可控性判据判断图8-20所示桥式电路的可控性。

解 选取状态变量： $x_1 = i_L$ ， $x_2 = u_c$ 。电路的状态方程如下：

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{L} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right) x_1 + \frac{1}{L} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) x_2 + \frac{1}{L} u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) x_1 - \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{R_3 + R_4} \right) x_2$$

可控性矩阵为 $S_3 = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L^2} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right) \\ 0 & \frac{1}{LC} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \end{bmatrix}$

当 $R_1 R_4 \neq R_2 R_3$ 时， $\text{rank} S_3 = 2 = n$ ，系统可控；反之当 $R_1 R_4 = R_2 R_3$ ，即电桥处于平衡状态时，

$\text{rank} S_3 = \text{rank} [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L^2} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，系统不可控，显然， u 不能控制 x_2 。



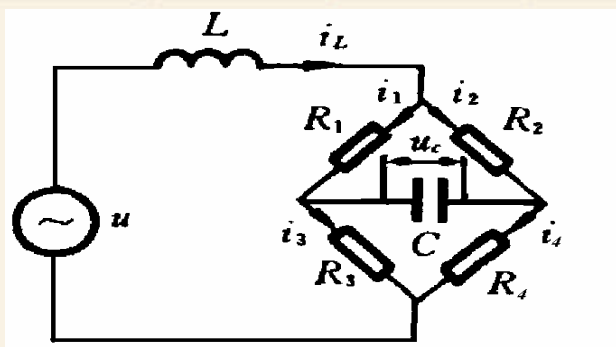


图8-20 电桥电路

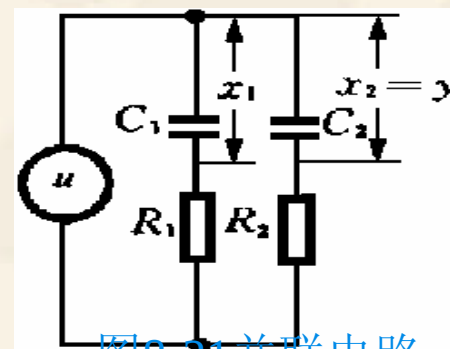


图8-21 并联电路

例8-33 试用可控性判断图8-21并联网络的可控性。

解 网络的微分方程为 $\dot{x}_1 + R_1 C_1 \dot{x}_1 = x_2 + R_2 C_2 \dot{x}_2 = u$

式中, $x_1 = u_{c1} = \frac{1}{C_1} \int i_1 dt$, $x_2 = u_{c2} = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt$

状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 + \frac{1}{R_1 C_1} u \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{R_2 C_2} x_2 + \frac{1}{R_2 C_2} u \end{aligned}$$

于是 $\text{rank}[b \quad Ab] = \text{rank} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{R_1^2 C_1^2} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2^2 C_2^2} \end{bmatrix}$

当 $R_1 C_1 \neq R_2 C_2$ 时, 系统可控。当 $R_1 = R_2, C_1 = C_2$, 有 $R_1 C_1 = R_2 C_2$, $\text{rank}[b \quad Ab] = 1 \leq n$, 系统不可控; 实际上, 设初始状态 $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, u 只能使 $x_1(t) \equiv x_2(t)$, 而不能将 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 分别转移到不同的数值, 即不能同时控制住两个状态。



例8-34 判断下列状态方程的可控性

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解 $S_4 = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$

显见 S_4 矩阵的第二、三行元素绝对值相同, $\text{rank} S_3 = 2 < 3$, 系统不可控。

(3) A 为对角阵或约当阵时的可控性判据

设二阶系数 A 、 b 矩阵为 $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

其可控性矩阵 S_3 的行列式为 $\det S_3 = \det [b \quad Ab] = \begin{vmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 \\ b_2 & \lambda_2 b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2 (\lambda_2 - \lambda_1)$

由此可知： A 阵对角化且有相异元素时，只需根据输入矩阵没有全零行即可判断系统可控。

若 $\lambda_2 = \lambda_1$ 时，则不能这样判断，这时 $\det S_3 \equiv 0$ ，系统总是不可控的。



又设二阶系数A、b矩阵为 $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

其可控性矩阵 S_3 的行列式为 $\det S_3 = \det \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 + b_2 \\ b_2 & \lambda_1 b_2 \end{vmatrix} = -b_2^2$

由此可知：当A阵约当化且相同特征值分布在一个约当块时，只需根据输入矩阵中与约当块最后一行所对应的行不是全零行，即可判断系统可控，与输入矩阵中的其它行是否为零行是无关的。

以上判断方法可推广到A阵对角化、约当化的n阶系统。设系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

A为对角阵时的可控性判据可表为：A为对角阵且元素各异时，输入矩阵不存在全零行。



当A为对角阵且含有相同元素时，上述判据不适用，应根据可控性矩阵的秩来判断。

设系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & \cdots & r_{2p} \\ r_{31} & \cdots & r_{3p} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

A阵约当化时的可控性判据可表为：输入矩阵中与约当块最后一行所对应的行不存在

全零行（与约当块其它行所对应的行允许是全零行）；输入矩阵中与相异特征值所对应的行不存在全零行。

当A阵的相同特征值分布在两个或更多个约当块时，例如

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \text{ 以上判据不}$$

适用，也应根据可控性矩阵的秩来判断。



例8-35 下列系统是可控。

$$1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & & 0 & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & \lambda_3 & 1 & \\ & 0 & & \lambda_3 & 1 & \\ & & & & \lambda_3 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

例8-36 下列系统不可控

$$1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$3) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



(4) 可控标准型问题

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

其可控性矩阵为

$$S_3 = [b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & x & x \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \cdots & x & x \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & x & x \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

与该状态方程对应的可控性矩阵 S_3 是一个右下三角阵，且其主对角线元素均为1，系统一定是可控的，这就是式(4-3)称为可控标准型的由来。



§ 4.3 线性定常系统的可观测性

[首页](#)[跳转](#)[退出](#)

§ 4.3.1 离散系统的状态可观测性

定义：已知输入向量序列 $u(0), \dots, u(n-1)$ 及输出向量序列 $y(0), \dots, y(n-1)$ ，能唯一确定任意初始状态向量 $x(0)$ ，则称系统是完全可观测的。

$$x(k+1) = \Phi x(k) + Gu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

因为是讨论可观性，可假设输入为0，其解为

$$x(k) = \Phi^k x(0)$$

$$y(k) = C\Phi^k x(0)$$

将 $y(k)$ 写成展开式

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= Cx(0) \\ y(1) &= C\Phi x(0) \\ &\vdots \\ y(n-1) &= C\Phi^{n-1}x(0) \end{aligned} \right\}$$



其向量-矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix}$$

令 $V_1^T = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix}$

V_1^T 为线性定常离散系统可观测性矩阵。

可观测的充分必要条件为

$$\text{rank} V_1^T = n = \text{rank} V = \text{rank} \begin{bmatrix} C^T & \Phi^T C^T & \dots & (\Phi^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$$



例8-37 判断下列线性定常离散系统的可观测性，并讨论可观测性的物理解释。其输出矩阵取了两种情况。 $x(k+1) = \Phi x(k) + gu(k)$, $y(k) = C_i(k)$, $i=1,2$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [0 \quad 1 \quad 0], \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解 计算可观测性矩阵 V_1

$$(1) \quad C_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi^T C_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\Phi^T)^2 C_1^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det V_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

故系统可观测。由输出方程 $y(k) = x_2(k)$ 可见，在第 k 步便可由输出确定状态变量 $x_2(k)$ 。
由于 $y(k+1) = x_2(k+1) = -2x_2(k) + x_3(k)$

故在第 $(k+1)$ 步便可确定 $x_3(k)$ 。由于

$$y(k+2) = x_2(k+2) = -2x_2(k+1) + x_3(k+1) = 4x_2(k) + 3x_1(k)$$

故在第 $(k+2)$ 步便可确定 $x_1(k)$ 。

该系统为三阶系统，可观测意味着至多以三步便能由 $y(k)$ ， $y(k+1)$ ， $y(k+2)$ 的输出测量值来确定三个状态变量。



$$(2) \quad C_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi^T C_2^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\Phi^T)^2 C_2^T = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 2 \neq 3$$

故系统不可观测。由输出方程 $y(k) = \begin{bmatrix} x_3(k) \\ x_1(k) \end{bmatrix}$ $y(k+1) = \begin{bmatrix} x_3(k+1) \\ x_1(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1(k) + 2x_3(k) \\ x_1(k) - x_3(k) \end{bmatrix}$

$$y(k+2) = \begin{bmatrix} x_3(k+2) \\ x_1(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1(k+2) + 2x_3(k+2) \\ x_1(k+2) - x_3(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_3(k) + x_3(k) \\ -2x_3(k) - 3x_3(k) \end{bmatrix}$$

可看出三步的输出测量值中始终不含 $x_2(k)$ ，故 $x_2(k)$ 是不可观测状态变量。只要有一个状态变量不可观测，称系统不完全可观测，简称不可观测。

连续系统的状态可观测性 其定义为：已知输入 $u(t)$ 及有限时间间隔 $t \in [t_0, t_f]$ 内测量到的输出 $y(t)$ ，能唯一确定初始状态 $x(t_0)$ ，则称系统是完全可以观测的，简称系统可观测。



定义

已知输入 $u(t)$ 及有限时间间隔 $t \in [t_0, t_f]$ 内测量到的输出 $y(t)$ ，能惟一确定初始状态 $x(t_0)$ ，则称系统完全可观测

对于多输入系统

状态可观测的充分必要条件是

$$\text{rank} V_2^T = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

或

$$\text{rank} V_2 = \text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = n$$

V_2^T, V_2 均称为可观测性矩阵。



§ 4.3.3 A为对角阵或约当阵时的可观测性判据

(1) 单输入对角二阶系统

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad C = [C_1 \quad C_2]$$

可观测矩阵 V_2 的行列式为 $\det V_2 = \det [C^T \quad A^T C^T] = \begin{vmatrix} C_1 & \lambda_1 C_1 \\ C_2 & \lambda_2 C_2 \end{vmatrix} = C_1 C_2 (\lambda_2 - \lambda_1)$

判据：A阵对角化且有相异特征值时，只需根据输出矩阵中没有全零列即可判断系统

可观测。若 $\lambda_2 = \lambda_1$ 时，则不能这样判断，这时 $\det V_2 \equiv 0$ ，系统总是不可观测的。

(2) 单输入约当二阶系统

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad C = [C_1 \quad C_2]$$

则 $\det V_2 = \det [C^T \quad A^T C^T] = \begin{vmatrix} C_1 & \lambda_1 C_1 \\ C_2 & C_1 + \lambda_1 C_2 \end{vmatrix} = C_1^2$



判据：输出矩阵中与约当块最前一列所对应的列不是全零列。
有时A阵的相同特征值分布在两个或更多个约当块内时，例如

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \text{ 以上判断方法不适用。}$$

以下推广到A阵对角化、约当化的n阶系统。设系统动态方程为（令 $u=0$ ）

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} x \quad y = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q1} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} x$$

式中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为系统相异特征值，状态变量间解耦，输出解为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q1} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & x_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} & x_2(0) \\ \vdots & \vdots \\ e^{\lambda_n t} & x_n(0) \end{bmatrix}$$



A为对角阵时可观测判据：可表为：A为对角阵且元素各异时，输出矩阵不存在全零列。

当A为对角阵但含有相同元素时，上述判据不适用，应根据可观测矩阵的秩来判断。

设系统动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q1} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

为二重特征值且构成一个约当块， $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ ，为相异特征值。动态方程解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_1 t} & & \\ & & e^{\lambda_3 t} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q1} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} x_1(0) + te^{\lambda_1 t} x_2(0) \\ e^{\lambda_1 t} x_2(0) \\ e^{\lambda_3 t} x_3(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} x_n(0) \end{bmatrix}$$



故A为约当阵且相同特征值分布在一个约当块内时，可观测判据：

输出矩阵中与约当块最前列对应的列不存在全零列（与约当块其它列所对应的列允许是全零列）；输出矩阵中与相异特征值所对应的列不存在全零列。

对于相同特征值分布在两个或更多个约当块内的情况，以上判据不适用，仍应用可观测矩阵来判断。

例8-38 下列系统可观测，试自行说明。

$$1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ & & -2 & 1 & \\ & & & -2 & 1 \\ & & & & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad y = [-5 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0]x$$



例8-39 下列系统不可观测，试自行说明。

$$(1) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x, \quad y = [1 \quad 0]x$$

$$(2) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x, \quad y = [1 \quad 1]x$$

§ 4.3.4 可观测标准型问题

动态方程中的A、c矩阵具有下列形式

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$



其可观测性矩阵

$$V_2 = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \times & \times \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \cdots & \times & \times \\ 1 & -a_{n-1} & \times & \cdots & \times & \times \end{bmatrix}$$

V_2 是一个右下三角阵, $\det V_2 \neq 0$, 系统一定可观测, 这就是形如 (8-125) 所示的A、C矩阵称为可观测标准型名称的由来。一个可观测系统, 当A、C阵不具有可观测标准型时, 也可选择适当的变换化为可观测标准型。



§ 4.4 可控性、可观测性与传递函数矩阵的关系

§ 4.4.1 SISO系统

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$

当A阵具有相异特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 时, 通过线性变换定可是A对角化为

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [f_1 \quad \dots \quad f_n] z = \sum_{i=1}^n f_i z_i$$

利用A阵对角化的可控、可观测性判据可知: 当 $r_i = 0$ 时, x_i 不可控; 当 $f_i = 0$ 时, x_i 不可观测。试看传递函数 $G(s)$ 所具有的相应特点。由于

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - A)^{-1}b$$

其中 $(sI - A)^{-1}b$ 乃是输入至状态向量之间的传递矩阵。这可由状态方程 两端取拉氏变换 (令初始条件为零) 来导出。 $x(s) = (sI - A)^{-1}bu(s)$

当 $r_1 = 0$ 时, x_1 不可控, 则 $c(sI - A)^{-1}$ 矩阵一定会出现零、极点对消现象,



$$\text{如 } (sI - A)^{-1}b = \begin{bmatrix} s - \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s - \lambda_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s - \lambda_1} \cdot 0 \\ \frac{1}{s - \lambda_2} \cdot r_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{s - \lambda_n} \cdot r_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(s - \lambda_1)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} \begin{bmatrix} 0 \\ (s - \lambda_3) \cdots (s - \lambda_n) \\ \vdots \\ (s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$c(sI - A)^{-1}$ 是初始状态至输出向量之间的传递矩阵。

$$y(s) = cx(s) = c(sI - A)^{-1}x_0$$

当 $f_1 = 0$ 时, x_1 不可观测, 则 $c(sI - A)^{-1}$ 也一定会出现零、极点对消现象, 如



$$c(sI - A)^{-1} = [0 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n] \begin{bmatrix} s - \lambda_1 & & & 0 \\ & s - \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s - \lambda_n \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{0}{s - \lambda_1} & \frac{f_2}{s - \lambda_2} & \cdots & \frac{f_n}{s - \lambda_n} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{(s - \lambda_1)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} \cdot [0 \quad (s - \lambda_3) \cdots (s - \lambda_n) f_2 \quad \cdots \quad (s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_{n-1}) f_n]$$

有以上分析可知：单输入-单输出系统可控可观的充要条件是：

由动态方程导出的传递函数不存在零极点对消（即传递函数不可约）；或系统可控的充要条件是 $(sI - A)^{-1}b$ 不存在零极点对消，系统可观的充要条件是 $c(sI - A)^{-1}$ 不存在零极点对消。

以上判据仅适用于单输入—单输出系统，对多输入—多输出系统一般不适用。



例8-40 已知下列动态方程，试研究其可控性、可观测性与传递函数的关系。

$$1) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.5 & -1.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [2.5 \quad 1]x$$

$$2) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2.5 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1]x$$

$$3) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0]x$$



解 三个系统的传递函数均为 $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+2.5}{(s+2.5)(s-1)}$ ，存在零、极点对消。

(1) A 、 b 为可控标准型 故可控不可观测。

(2) A 、 c 为可观测标准型，故可观测不可控。

(3) 由 A 阵对角化时的可控可观测判据可知，系统不可控不可观测，

x_2 为不可控不可观测的状态变量。

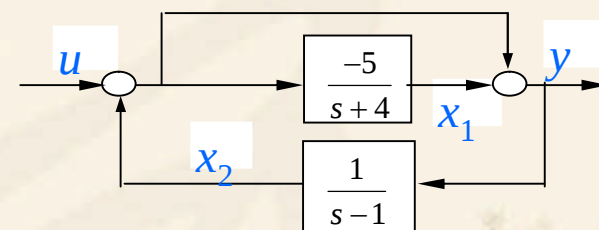
例8-41 设二阶系统结构图如图所示，试用状态空间及传递函数描述判断系统的可控性与可观测性，并说明传递函数描述的不完全性。

解 由结构图列写系统传递函数

$$x_1(s) = \frac{-5}{s+4}(u(s) - x_2(s))$$

$$x_2(s) = \frac{1}{s-1}y(s)$$

$$y(s) = x_1(s) + [u(s) - x_2(s)]$$



系统结构图

再写成向量-矩阵形式的动态方程 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + bu$

由状态可控性矩阵 S_3 及可观测性矩阵 V_2 有 $S_3 = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, $|S_3| = 0$ 故不可控。



$$V_2 = [C^T \quad A^T C^T] = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, |V_2| = 0$$

故不可观测。由传递矩阵

$$(sI - A)^{-1}b = \begin{bmatrix} s+4 & -5 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 4s - 5} \begin{bmatrix} s & 5 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{(s-1)}{(s-1)(s+5)} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 4s - 5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 5 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix} = \frac{(s-1)}{(s-1)(s+5)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

两式均出现零极点对消，系统不可控、不可观测。系统特征多项式为 $|sI - A| = (s+5)(s-1)$ ，二阶系统的特征多项式是二次多项式，对消结果是二阶系统降为一阶。本系统原是不稳定系统，含一个右特征值 $s = \lambda = +1$ ，但如果用对消后的传递函数来描述系统时，会误认为系统稳定。

§ 4.4.2 MIMO 系统

多输入-多输出系统传递函数矩阵存在零极点对消时，系统并非一定是不可控或不可观测的，需要利用传递函数矩阵中的行或列的线性相关性来判断。



传递函数矩阵 $G(s)$ 的元素是 s 的多项式，设 $G(s)$ 以下面列向量组来表示

$$G(s) = [g_1(s) \quad g_2(s) \quad \cdots \quad g_n(s)] \quad (8-132)$$

若存在不全为零的时常数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 使下式 $a_1 g_1(s) + a_2 g_2(s) + \cdots + a_n g_n(s) = 0$ (8-133) 成立，则称函数 $g_1(s), g_2(s), \dots, g_n(s)$ 是线性相关的。若只有当 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 全为零时，式 (8-133) 才成立，则称函数 $g_1(s), g_2(s), \dots, g_n(s)$ 是线性无关的。

定理 多输入系统可控的充要条件是 $(sI - A)^{-1}B$ 的 n 行线性无关。

定理 多输出系统可观的充要条件是： $c(sI - A)^{-1}$ 的 n 行线性无关。



例8-42 试用传递矩阵判据判断下列双输入-双输出系统的可控性和可观测性。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & -3 & -2 \\ 0 & s-4 & -2 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{(s-1)}{(s-1)^2(s-4)} \begin{bmatrix} s-1 & 3 & 2 \\ 0 & s-4 & 2 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

写出特征多项式 $|sI - A|$ ，将矩阵中各元素的公因子提出矩阵符号外面以便判断。

故

$$(sI - A)^{-1}B = \frac{(s-1)}{(s-1)^2(s-4)} \begin{bmatrix} 2 & s-4 \\ 2 & 0 \\ s-4 & 0 \end{bmatrix}$$

若存在不全零的时常数 a_1, a_2, a_3 能使下列向量方程

$$a_1[2 \quad s-4] + a_2[2 \quad 0] + a_3[s-4 \quad 0] = 0$$

成立，则称三个行向量线性相关；若只有当 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 时上式才成立，则称三个行向量线性无关。



运算时可先令上式成立，可分列出

$$\begin{aligned} 2a_1 + 2a_2 + (s-4)a_3 &= 0 \\ (s-4)a_1 &= 0 \end{aligned}$$

解得 $a_1 = 0$ 且 $2a_2 + a_3s - 4a_3 = 0$ 同幂项系数应相等，有

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

故只有 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 时才能满足上述向量方程，于是可断定 $(sI - A)^{-1}B$ 的三行线性无关，系统可控。由

$$C(sI - A)^{-1} = \frac{(s-1)}{(s-1)^2(s-4)} \begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } a_1 \begin{bmatrix} s-4 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 2 \\ s-4 \end{bmatrix} = 0$$

可分列为 $a_1(s-4) + 3a_2 + 2a_3 = 0 \quad (s-4)a_3 = 0$

解得 $a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 0$

故 $c(sI - A)^{-1}$ 的三列线性无关，系统可观测。

显见，这时与传递矩阵出现零极点对消无关。利用可控性矩阵及可观测性矩阵的判据，可得相同结论。



例8-43 试用传递矩阵判据判断下列单输入-单输出系统的可控性、可观性。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, c = [1 \quad 1 \quad 1]$$

解 $(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-2 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ 0 & -3 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}$

$$= \frac{1}{(s-2)^2(s-1)} \begin{bmatrix} (s-2)(s-1) & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)(s-1) & 0 \\ 0 & 3(s-2) & (s-2)^2 \end{bmatrix}$$

故 $(sI - A)^{-1}b = \frac{(s-2)}{(s-2)^2(s-1)} \begin{bmatrix} 0 \\ s-1 \\ -(s-5) \end{bmatrix}$

令 $a_1 \cdot 0 + a_2(s-1) - a_3(s-5) = 0$

分列出 $a_2 - a_3 = 0$, $-a_2 + 5a_3 = 0$

解得 $a_2 = a_3 = 0$, a_1 可为任意值。



于是能求得不全零的 $(a_1 \ a_2 \ a_3)$ 使上述代数方程满足，故 $(sI - A)^{-1}b$ 的三行线性相关，系统不可控。该单输入系统， $(sI - A)^{-1}b$ 存在零极点对消，由此同样得出不可控的结论。

$$\text{由 } c(sI - A)^{-1} = \frac{(s-2)}{(s-2)^2(s-1)} \begin{bmatrix} s-1 & s+2 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } a_1(s-1) + a_2(s+2) + a_3(s-2) = 0$$

$$\text{可分列为 } a_1 + a_2 + a_3 = 0, -a_1 + 2a_2 - 2a_3 = 0$$

$$\text{解得 } \frac{3}{4}a_1 = 3a_2 = a_3$$

可见存在不全零的 $(a_1 \ a_2 \ a_3)$ 满足上述代数方程，故 $c(sI - A)^{-1}$ 的三列线性相关，系统不可观测。此时 $c(sI - A)^{-1}$ 也存在零极点对消，同样得出不可观测的结论。



§ 4.5 连续系统离散化后的可控性与可观测性

一个可控的连续系统，当其离散化后并不一定能保持其可控性；一个可观测的连续系统，离散化后也并不一定能保持其可观测性。下面举例说明，设连续系统动态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

它是可控标准型，故一定可控。

其状态转移矩阵为 $\Phi(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{1}{s^2 + \omega^2} \\ \frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2} & \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$

其离散化状态方程为 $x(k+1) = \Phi(T)x(k) + G(T)u(k)$

$$= \begin{bmatrix} \cos \omega T & \frac{\sin \omega T}{\omega} \\ -\omega \sin \omega T & \cos \omega T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos \omega T}{\omega^2} \\ \frac{\sin \omega T}{\omega} \end{bmatrix} u(k)$$

离散化系统的可控性矩阵为 $S = [G \quad \Phi G] = \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos \omega T}{\omega^2} & \frac{\cos \omega T - \cos^2 \omega T + \sin^2 \omega T}{\omega^2} \\ \frac{\sin \omega T}{\omega} & \frac{2 \sin \omega T \cos \omega T - \sin \omega T}{\omega} \end{bmatrix}$



当采样周期 $T = \frac{k\pi}{\omega}$ ($k=1,2,\dots$) 时, 可控性矩阵为零阵, 系统不可控。故离散化系统的采样周期选择不当时, 便不能保持原连续系统的可控性。当连续系统状态方程不可控时, 不管采样周期 T 如何选择, 离散化系统一定是不可控的。读者可自行证明: 离散后的系统不可观测。



首页

跳转

退出

线性系统非奇异线性变换及系统的规范分解

绪论

5. 1 线性系统的非奇异线性变换及其性质

5. 2 几种常见的线性变换

5. 3 对偶原理

5. 4 线性系统的规范分解

返回



第五章 线性系统非奇异线性变换及系统的规范分解

为了便于研究系统固有特性，曾经引入过多种非奇异线性变换，如经常要将 A 阵对角化、约当化；将系统化为可控标准型，可观测标准型也需要进行线性变换。为了便于分析与设计，需要对动态方程进行规范分解。如何变换？变换后，系统的固有特性是否会引起改变呢？



§ 5.1 线性系统的非奇异线性变换及其性质

§ 5.1.1 非奇异线性变换

设系统动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

令 $x = P\bar{x}$

非奇异矩阵 P 将状态 x 变换为状态 $\bar{x}$ 。

变换后动态方程

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t)\end{aligned}$$

则有 $\bar{x} = P^{-1}x$ $\bar{A} = P^{-1}AP$ $\bar{B} = P^{-1}B$ $\bar{C} = CP$ $\bar{D} = D$

并称为对系统进行 P 变换。线性变换的目的在于使 $\bar{A}$ 阵或系统规范化，以便于揭示系统特性，简化分析、计算与设计，在系统建模，可控性、可观测性、稳定性分析，系统综合设计方面特别有用。非奇异线性变换不会改变系统的固有性质，所以它是等价变换。待计算出所需结果之后，再引入反变换 $\bar{x} = P^{-1}x$ ，将新系统变回原来的状态空间中去，获得最终结果。



系统经过非奇异线性变换，系统的特征值、传递矩阵、可控性、可观测性等重要性质均保持不变性。下面进行证明。

1. 变换后系统传递矩阵不变

证明： 列出变换后系统传递矩阵 $\bar{G}$

$$\begin{aligned}\bar{G} &= CP(sI - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D \\ &= CP(P^{-1}sIP - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D \\ &= CP[P^{-1}(sI - A)P]^{-1}P^{-1}B + D \\ &= CPP^{-1}(sI - A)^{-1}PP^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D = G\end{aligned}$$

变换前后的系统传递矩阵相同!!!



2.线性变换后系统特征值不变

证明 变换后系统的特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda I - P^{-1}AP| &= |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}\lambda I P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| |\lambda I - A| |P| \\ &= |P^{-1}| |P| |\lambda I - A| = |I| |\lambda I - A| = |\lambda I - A| \end{aligned}$$

变换前后的特征多项式相同，故特征值不变。

由此，非奇异变换后，系统的稳定性不变。

3.变换后系统可控性不变

证明 变换后系统可控性阵的秩

$$\begin{aligned} \text{rank} S_4 &= \text{rank}[P^{-1}B \quad (P^{-1}AP)P^{-1}B \quad (P^{-1}AP)^2P^{-1}B \quad \cdots \quad (P^{-1}AP)^{n-1}P^{-1}B] \\ &= \text{rank}[P^{-1}B \quad P^{-1}AB \quad P^{-1}A^2B \quad \cdots \quad P^{-1}A^{n-1}B] \\ &= \text{rank} P^{-1}[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \\ &= \text{rank}[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \end{aligned}$$

变换前后的可控性矩阵的秩相同，故可控性不变。



4. 变换后系统可观测性不变

证明 列出变换后可观测性矩阵的秩

$$\begin{aligned}
 \text{rank} V_2 &= \text{rank}[(CP)^T \quad (P^{-1}AP)^T (CP)^T \quad \cdots \quad ((P^{-1}AP)^{n-1})^T (CP)^T] \\
 &= \text{rank}[P^T C^T \quad P^T A^T C^T \quad \cdots \quad P^T (A^{n-1})^T C^T] \\
 &= \text{rank} P^T [C^T \quad A^T C^T \quad \cdots \quad (A^{n-1})^T C^T] \\
 &= \text{rank}[C^T \quad A^T C^T \quad \cdots \quad (A^{n-1})^T C^T]
 \end{aligned}$$

变换前后可观测性矩阵的秩相同，故可观测性不变。

5. $\bar{\Phi}(t) = e^{\bar{A}t} = P^{-1}e^{At}P = P^{-1}\Phi(t)P$

证明: $e^{P^{-1}APt} = I + P^{-1}APt + \frac{1}{2}(P^{-1}AP)^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k t^k + \cdots$

$$\begin{aligned}
 &= P^{-1}IP + P^{-1}APt + \frac{1}{2}(P^{-1}AP)^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k t^k + \cdots \\
 &= P^{-1}(I + At + \frac{1}{2}A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots)P = P^{-1}e^{At}P
 \end{aligned}$$



§ 5.2 几种常用的线性变换

[首页](#)[跳转](#)[退出](#)

§ 5.2.1 化A为对角阵

1) A阵为任意方阵, 且有互异实数特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。则由非奇异变换可将其化为对角阵

$$\bar{A} = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

P由特征向量 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 组成, $P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]$

特征向量满足 $A p_i = \lambda_i p_i$

2) A阵为友矩阵, 且有互异实数特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。则用范德蒙特 (Vandermode) 矩阵

P可以将A对角化。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$



3) A 为任意方阵，有 m 重实数特征根 $(\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m)$ ，其余 $(n-m)$ 个特征根为互异实数特征根，但在求解 $Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i = 0, \cdots, m)$ 时，仍有 m 个独立的特征向量 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ ，则仍可以将 A 化为对角阵。

$$\bar{A} = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_{m+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P = [p_1 \quad p_2 \quad p_m \quad p_{m+1} \cdots p_n] \quad (8-144)$$

式中， $p_{m+1}, p_{m+2}, \cdots, p_n$ 是互异实数特征根 $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \cdots, \lambda_n$ 对应的特征向量。



1) A阵有m重实数特征根 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m$), 其余 (n-m) 个特征根为互异实数特征根, 但重根只有一个独立的特征向量 p_1 时, 只能将A化为约当阵J。

$$J = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \ddots & 1 & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ \cdots & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_{m+1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P = [p_1 \quad p_2 \quad p_m \quad \vdots \quad p_{m+1} \cdots p_n]$$

式中, $p_1, p_{m+1}, p_{m+2}, \cdots, p_n$ 分别是互异实数特征根 $\lambda_1, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \cdots, \lambda_n$ 对应的特征向量, 而 $p_2, p_3, \cdots, p_m$ 是广义特征向量, 可由下式求得

$$[p_1 \quad p_2 \quad p_m] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda & \ddots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} = A [p_1 \quad p_2 \quad p_m]$$



2) **A**阵为友矩阵，具有**m**重实数特征根（ $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m$ ），其余（**n-m**）个特征根为互异实数特征根，但重根只有一个独立的特征向量 p_1 时，将**A**约当阵化的**P**阵为

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \frac{\partial p_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 p_1}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^{m-1} p_1}{\partial \lambda_1^{m-1}} & \vdots & p_{m+1} \cdots p_n \end{bmatrix}$$

3) **A**阵有五重特征根 λ_1 ，但有两个独立特征向量 p_1, p_2 ，其余（**n-5**）个特征根为互异特征根，一般可化**A**为如下形式的约当阵**J**

$$J = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & & \\ & & & & \lambda_1 & & \\ & & & & & \lambda_6 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \frac{\partial p_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 p_1}{\partial \lambda_1^2} & \vdots & \frac{\partial p_2}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 p_2}{\partial \lambda_2^2} & \vdots & p_6 \cdots p_n \end{bmatrix}$$



前面曾对单输入-单输出建立了如下的可控标准型状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

与该状态方程对应的可控性矩阵 S_3 是一个右下三角阵，且其主对角线元素均为1

$$S = [b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \times & \times \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \cdots & \times & \times \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & \times & \times \end{bmatrix}$$

一个可控系统，当 A , b 不具有可控标准型时，定可选择适当的变换化为可控标准型。

设系统状态方程为 $\dot{x} = Ax + bu$

进行 P^{-1} 变换，即令 $x = P^{-1}z$



状态方程变换为 $\dot{z} = PAP^{-1} + Pbu$

$$\text{要求 } PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad Pb = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

设变换矩阵为 $P = [p_1^T \ p_2^T \ \cdots \ p_n^T]^T$

根据A阵变换要求， P 应满足式（4-4），即

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-2} \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-2} \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}$$



$$p_1 A = p_2$$

展开之 $p_2 A = p_3$

$$\vdots$$

$$p_{n-2} A = p_{n-1}$$

$$p_{n-1} A = p_n$$

$$p_n A = -a_0 p_1 - a_1 p_2 - \cdots - a_{n-2} p_{n-1} - a_{n-1} p_n$$

增补一个方程 $p_1 = p_1$ 整理后，得到变换矩阵为 $P =$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 A \\ \vdots \\ p_1 A^{n-1} \end{bmatrix}$$

另根据 b 阵变换要求， P 应满足式 (4-4)，有

即 $p_1 \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

故 $p_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}^{-1}$

该式表示 p_1 是可控性矩阵逆阵的最后一行。

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 A \\ \vdots \\ p_1 A^{n-1} \end{bmatrix} b = p_1 \begin{bmatrix} b \\ Ab \\ \vdots \\ A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$



于是可以得到变换矩阵 P 的求法如

1. 计算可控性矩阵 $S = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$

2. 计算可控性矩阵的逆阵 $S^{-1} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}$

3. 取出 S^{-1} 的最后一行（即第 n 行）构成 p_1 行向量 $p_1 = \begin{bmatrix} s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}$

4. 按下列方式构造 P 阵 $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 A \\ \vdots \\ p_1 A^{n-1} \end{bmatrix}$

5. P^{-1} 便是将普通可控状态方程可化为可控标准型状态方程的变换矩阵。当然，也可先将任意矩阵 A 化为对角型，然后再将对角阵化为友矩阵的方法将 A 为友矩阵。



设有系统 $S_1(A, B, C)$ ，则称系统 $S_2(A^T, B^T, C^T)$ 为系统 S_1 的对偶系统。其动态方程分别为

$$S_1: \dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

$$S_2: \dot{z} = A^T z + C^T v, \quad w = B^T z$$

式中， x 、 z 均为 n 维状态向量， u 、 w 均为 p 维， y 、 v 均为 q 维。注意到系统与对偶系统之间，其输入、输出向量的维数是相交换的。当 S_2 为 S_1 的对偶系统时， S_1 也是 S_2 的对偶系统。如果系统 S_1 可控，则 S_2 必然可观测；如果系统 S_1 可观测，则 S_2 必然可控；反之亦然，这就是对偶原理。

实际上，不难验证：系统 S_1 的可控性矩阵与对偶系统 S_2 的可观测性矩阵完全相同；系统 S_1 的可观测性矩阵与对偶系统 S_2 的可控性矩阵完全相同。

在动态方程建模、系统可控性和可观测性的判别、系统线性变换等问题上，应用对偶原理，往往可以使问题得到简化。



设单输入-单输出系统动态方程为 $\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx$

系统可观测，但 A, c 不是可观测标准型。其对偶系统动态方程为

$$\dot{z} = A^T z + c^T v, \quad w = b^T z$$

对偶系统一定可控，但不是可控标准型。可利用可控标准型变换的原理和步骤，先将对偶系统化为可控标准型，再一次使用对偶原理，便可获得可观测标准型，下面仅给出其计算步骤。

- (1) 列出对偶系统的可控性矩阵（及原系统的可观测性矩阵 V_2 ）

$$V_2 = [c^T \quad A^T c^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1} c^T]$$

- (2) 求 V_2 的逆阵 V_2^{-1} 且记为行向量组

$$V_2^{-1} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

- (3) 取 V_2^{-1} 的第 n 行 v_n^T ，并按下列规则构造变换矩阵 $P =$

$$P = \begin{bmatrix} v_n^T \\ v_n^T A^T \\ \vdots \\ v_n^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix}$$



(4) 求 P 的逆阵 P^{-1} ，并引入 P^{-1} 变换即 $z = P^{-1}\bar{z}$ ，变换后动态方程为

$$\dot{z} = PA^T P^{-1} \bar{z} + Pc^T v, \quad w = b^T P^{-1} \bar{z} \quad (8-169)$$

(5) 对对偶系统再利用对偶原理，便可获得原系统的可观测标准型，结果为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= (PA^T P^{-1})^T \bar{x} + (b^T P^{-1})^T u = P^{-T} A P^T \bar{x} + P^{-T} b u \\ y &= (Pc^T)^T \bar{x} = c P^T \bar{x} \end{aligned} \quad (8-170)$$

与原系统动态方程相比较，可知将原系统化为可观测标准型需进行变换，即令

$$x = P^T \bar{x} \quad (8-171)$$

$$\text{式中, } P^T = \begin{bmatrix} v_n & Av_n & A^{n-1}v_n \end{bmatrix} \quad (8-172)$$

v_n 为原系统可观测性矩阵的逆阵中第 n 行的转置。



§ 5.4 线性系统的规范分解

不可控系统含有可控、不可控两种状态变量；状态变量可以分解成可控 x_c 、不可控 $x_{\bar{c}}$ 两类，与之相应，系统和状态空间可分成可控子系统和不可控子系统、可控子空间和不可控子空间。同样，不可观测系统状态变量可以分解成可观 x_o 、不可观 $x_{\bar{o}}$ 两类，系统和状态空间也分成可观子系统和不可观子系统、可观子空间和不可观子空间。这个分解过程称为系统的规范分解。通过规范分解能明晰系统的结构特性和传递特性，简化系统的分析与设计。具体方法是选取一种特殊的线性变换，使原动态方程中的 A ， B ， C 矩阵变换成某种标准构造的形式。上述分解过程还可以进一步深入，状态变量可以分解成可控可观测 x_{co} 、可控不可观测 $x_{c\bar{o}}$ 、不可控可观测 $x_{\bar{c}o}$ 、不可控不可观测 $x_{\bar{c}\bar{o}}$ 四类，对应的状态子空间和子系统也分成四类。规范分解过程可以先从系统的可控性分解开始，将可控，不可控的状态变量分离开，继而分别对可控和不可控的子系统再进行可观测性分解，便可以分离出四类状态变量及四类子系统。当然，规范分解得过程也可以从系统的可观测性分解开始。下面仅介绍可控性分解和可观测性分解的方法，有关证明从略。



§ 5.4.1 可控性分解 (用非奇异线性变换)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (5--1)$$

假定可控性矩阵的秩为 $r (r < n)$ ，从可控性矩阵中选出 r 个线性无关列向量，再附加上任意尽可能简单的 $(n-r)$ 个列向量，构成非奇异阵的 T^{-1} 变换矩阵，那么，只需引入 T^{-1} 变换，即令 $x = T^{-1} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}$ ，式 (5--1) 便变换成下列的标准构造

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = TAT^{-1} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + TBu, \quad y = CT^{-1} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} \quad (5--2)$$

式中 x_c 维 r 为可控状态子向量， $x_{\bar{c}}$ 为 $(n-r)$ 不可控状态子向量

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \text{行} \\ (n-r) \text{行} \end{matrix}$$

$r \text{列} \quad (n-r) \text{列}$

$$TB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \text{行} \\ (n-r) \text{行} \end{matrix}$$

$p \text{列}$

$$CT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} q \text{行} \\ r \text{列} \quad (n-r) \text{列} \end{matrix}$$



$$\dot{x}_c = \bar{A}_{11}x_c + \bar{A}_{12}x_{\bar{c}} + \bar{B}_1u$$

展开式 (5--2) $\dot{x}_{\bar{c}} = \bar{A}_{22}x_{\bar{c}}$

$$y = \bar{C}_1x_c + \bar{C}_2x_{\bar{c}}$$

将输出向量进行分解，可得子系统状态方程。可控子系统状态方程为

$$\dot{x}_c = \bar{A}_{11}x_c + \bar{A}_{12}x_{\bar{c}} + \bar{B}_1u, \quad y_1 = \bar{C}_1x_c$$

不可控子系统状态方程为 $\dot{x}_{\bar{c}} = \bar{A}_{22}x_{\bar{c}}, \quad y_2 = \bar{C}_2x_{\bar{c}}$

显见 u 只能通过可控子系统传递到输出，而与不可控子系统无关，故 u 至 y 之间的传递函数矩阵描述不能反应不可控部分的特性。但是，不可控子系统对整个系统的影响依然存在不可忽视，如要求 $\bar{A}_{22}$ 仅含稳定特征值，以保证整个系统稳定，并且应考虑到可控子系统的状态响应 $x_c(t)$ 及系统输出响应 $y(t)$ 均与 $x_{\bar{c}}$ 有关。

至于选择怎样的 $(n-r)$ 个附加列向量是无关紧要的，只要构成的 T^{-1} 非奇异，并不会改变规范分解的结果。



例8-44 已知系统 $S(A, b, c)$ ，试按可控性进行规范分解。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = [1 \quad -1 \quad 1]$$

解 计算可控性矩阵的秩

$$\text{rank}[b \quad Ab \quad A^2b] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} = 2 < n$$

故不可控。从中选出两个线性无关列，附加任意列向量 $[0 \quad 1 \quad 0]^T$ ，构成非奇异变换矩阵 T^{-1} ，并计算变换后的各矩阵

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = (T^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad cT^{-1} = [1 \quad 2 \quad 1], \quad Tb = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可控子系统动态方程为 $\dot{x}_c = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 2] x_c$

不可控子系统动态方程为 $\dot{x}_{\bar{c}} = x_{\bar{c}}, \quad y = -x_{\bar{c}}$



设系统可观测矩阵的秩为 $l (l < n)$ ，从可观测性矩阵中选出 l 个线性无关列向量，再附加上任意尽可能简单的 $(n-l)$ 个列向量，构成非奇异的 $\mathbf{\Lambda}$ 变换矩阵，那么只需引入 T^{-1} 变换，即令 $\mathbf{x} = T^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_o \\ \mathbf{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix}$ 式 (5--2) 便变换成下列标准构造

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_o \\ \dot{\mathbf{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = TAT^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_o \\ \mathbf{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + TBu, \quad y = CT^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_o \\ \mathbf{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad (5--3)$$

式中 $\mathbf{x}_o$ 为 l 维可观测状态子向量， $\mathbf{x}_{\bar{o}}$ 为 $(n-l)$ 维不可观测状态子向量，

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & 0 \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} l \text{ 行} \\ (n-l) \text{ 行} \\ r \text{ 列} & (n-l) \text{ 列} \end{matrix}$$

$$TB = \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \text{ 行} \\ (n-l) \text{ 行} \\ p \text{ 列} \end{matrix}$$

$$CT^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} q \text{ 行} \\ r \text{ 列} & (n-l) \text{ 列} \end{matrix}$$



展开式 (5--3) , 有

$$\begin{aligned}\dot{x}_o &= \bar{A}_{11}x_o + \bar{B}_1u \\ \dot{x}_{\bar{o}} &= \bar{A}_{21}x_o + \bar{A}_{22}x_{\bar{o}} + \bar{B}_2u \\ y &= \bar{C}_1x_o\end{aligned}$$

可观测子系统动态方程为 $\dot{x}_o = \bar{A}_{11}x_o + \bar{B}_1u$, $y = \bar{C}_1x_o = y$

不可观测子系统动态方程为 $\dot{x}_{\bar{o}} = \bar{A}_{21}x_o + \bar{A}_{22}x_{\bar{o}} + \bar{B}_2u$, $y_2 = 0$

例8-45 试将例8-44所示系统按可观测性进行分解。

解 计算可观测性矩阵的秩

$$\text{rank}[C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2 < n$$

故不可观测, 从中选出两个线性无关列, 附加任意一行, 构成非奇异变换矩阵,

并计算变换后各矩阵

$$T^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$Tb = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$cT^{-1} = [1 \ 0 \ 0]$$

可观测子系统

$$\dot{x}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x_o + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y_1 = [1 \ 0] x_o = y$$

不可观测子系统

$$\dot{x}_{\bar{o}} = [-5 \ 3] x_{\bar{o}} + 2x_{\bar{o}} + u, \quad y_2 = 0$$



首页

跳转

退出

控制系统的李雅普诺夫稳定性分析

绪论

6 . 1 状态反馈与极点配置

6 . 2 输出反馈与极点配置

6 . 3 状态重构与状态观测器设计

6 . 4 降维状态观测器的概念

返回

第六章 线性定常控制系统的综合设计

本章主要内容是极点配置，通过设计反馈控制来改善系统极点的分配，达到改善系统相应特性的目的。

根轨迹法：只改变一个参数，在根轨迹上选择极点，不能做到按需任意配置。

系统反馈控制的分类：

1 按照反馈信号的来源或引出点分 2 按照反馈信号的作用点或注入点分

- (1) 状态反馈
- (2) 输出反馈

- (1) 反馈至状态微分处
- (2) 反馈至控制输入处



§ 6.1 状态反馈与极点配置

§ 6.1.1 反馈至状态微分处

状态反馈两种基本形式：

(1) 状态反馈至控制输入处 (下面要重点讲)

(2) 状态反馈至状态微分处

特点：系统无需可控可观便可以任意配置耦合极点，且设计上只须将状态反馈阵与原有的系统矩阵合并即可。能够实现这种反馈控制的系统极少。配置后系统的可控性与可观性可能改变。

§ 6.1.2 反馈至控制输入处

原系统方程

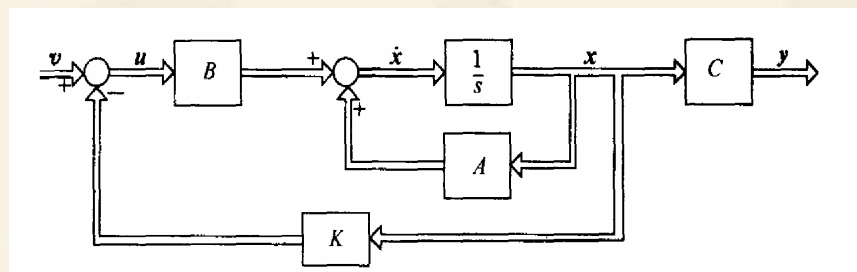
$$\dot{x} = Ax + bu, y = Cx$$

状态向量 x 通过待设计的状态反馈矩阵 k ，负反馈至控制输入处，于是

$$u = v - kx$$



从而构成了状态反馈系统。



状态反馈至控制输入

状态反馈系统方程

$$\dot{x} = Ax + b(v - kx) = (A - bk)x + bv, \quad y = Cx$$

设计定理：

引入反馈后，系统可控性不变，闭环极点可任意配置的充要条件是系统可控（可观性可能改变）。这种系统很少。

证明 这里以SISO系统进行证明。设SISO系统可控，通过程化为可控标准型，有

$$x = P^{-1}\bar{x}, \text{ 将状态方}$$



$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \bar{C} = CP^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{10} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \beta_{20} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{q0} & \beta_{q1} & \cdots & \beta_{q,n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = Pb = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T$$

在变换后的状态空间内，引入状态反馈阵

$$\bar{k} = [\bar{k}_0 \ \bar{k}_1 \ \cdots \ \bar{k}_{n-1}]$$

$$u = v - \bar{k}\bar{x}$$

这里分别由引出反馈系数，故变换后的状态动态方程为

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{A} - \bar{b}\bar{k})\bar{x} + \bar{b}v, y = \bar{C}\bar{x}$$



式中

$$\bar{A} - \bar{b}\bar{k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - \bar{k}_0 & -a_1 - \bar{k}_1 & -a_2 - \bar{k}_2 & \cdots & -a_{n-1} - \bar{k}_{n-1} \end{bmatrix}$$

显见 $(\bar{A} - \bar{b}\bar{k}, \bar{b})$ 仍为可控标准型，故引入状态反馈，系统可控不变。其闭环特征方程为

$$|\lambda - (\bar{A} - \bar{b}\bar{k})| = \lambda^n + (a_{n-1} + \bar{k}_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 + \bar{k}_1)\lambda + (a_0 + \bar{k}_0) = 0$$

于是，适当选择 $\bar{k}_0, \cdots, \bar{k}_{n-1}$ ，可满足特征方程中 n 个任意特定系统的要求，因而闭环极点可任意配置。充分性得证。

再证必要性。

设系统不可控，必有状态变量与输入 u 无关，不可能实现全状态反馈。于是不可控子系统的特征值不可能重新配置，传递函数不反映不可控部分的特性。必要性得证。



对在变换后状态空间中设计的 k 应换算回到原状态空间中去，由于

$$u = v - \bar{k}\bar{x} = v - \bar{k}P\chi = v - k\chi$$

故

$$k = \bar{k}P \quad (6-1)$$

对原受控系统直接采用状态反馈阵 k ，可获得于式(6—1)相同的特征值，这是因为线性变换后系统特征值不变。

实际求解状态反馈阵时，并不一定要进行到可控标准型的变换，只需校验系统可控，计算特征多项式 $|\lambda I - (A - bk)|$ 和特征值，并通过与具有希望特征值的特征多项式相比较，便可确定 k 阵。

另外需注意：

状态反馈系统仍是可控标准型。

因为非奇异线性变换后传递函数矩阵不变，故原系统的传递函数矩阵为

$$G_1 = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \begin{bmatrix} \beta_{10} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{q0} & \cdots & \beta_{q,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}$$



而状态反馈系统的传递矩阵为

$$G_2 = \frac{1}{s^n + (a_{n-1} + \bar{k}_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 + \bar{k}_1)s + (a_0 + \bar{k}_0)} \begin{bmatrix} \beta_{10} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{q0} & \cdots & \beta_{q,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}$$

显然, G_1, G_2 的分子相同,

例8-46 设系统传递函数为 $\frac{y}{u(s)} = \frac{10}{s(s+1)(s+2)} = \frac{10}{s^3 + 3s^2 + 2s}$

试用状态反馈使闭环极点配置在 $-2, -1 \pm j$ 。

解 单输入-单输出系统传递函数无零极点对消, 故可控可观测。其可控标准型实现为



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [10 \quad 0 \quad 0] x$$

(1×3) 状态反馈矩阵为 $k=[k_0 \quad k_1 \quad k_2]$

态反馈系统特征方程为 $|\lambda - (A - bk)| = \lambda^3 + (3 + k_2)\lambda^2 + (2 + k_1)\lambda + k_0 = 0$
期望闭环极点对应的系统特征方程为

$$(\lambda + 2)(\lambda + 1 - j)(\lambda + 1 + j) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0$$

由两特征方程同幂项系数应相同, 可得 $k_0 = 4, k_1 = 4, k_2 = 1$

即 系统反馈阵 $k=[4 \quad 4 \quad 1]$ 将系统闭环极点配置在 $-2, -1 \pm j$ 。

例8-47 设受控系统状态方程为 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$, 试用状态反馈使闭环极点配置在 -1 。

解 由系统矩阵为对角阵, 显见系统可控, 但不稳定。设反馈控制律为 $k=[k_1 \quad k_2]$, $u = v - kx$, 则



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

闭环特征多项式为 $\begin{vmatrix} \lambda + k_1 & k_2 \\ k_1 & \lambda + k_2 - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (k_1 + k_2 - 1)\lambda - k_1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$

因此, $k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$

最后, 闭环系统的状态方程为 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v$

例8-48 设受控系统传递函数为 $\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s(s+6)(s+12)} = \frac{1}{s^3 + 18s^2 + 72s}$ 综合指标为:

①超调量: $\sigma\% \leq 5\%$;

②峰值时间 $t_p \leq 0.5s$; ③系统带宽: $\omega_b = 10$;

④位置误差 $e_p = 0$ 。

试用极点配置法进行综合。



解 1) 如图所示, 本题要用带输入变换的状态反馈来解题, 原系

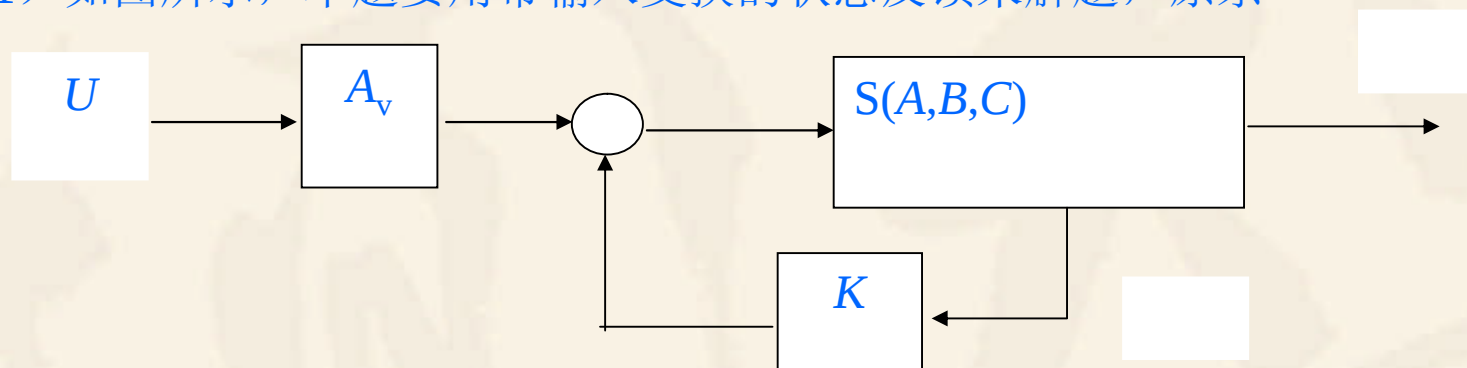


图8-24 带输入变换的状态反馈系统

统可控标准型动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -72 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]$$

2) 根据技术指标确定希望极点

系统有三个极点, 为方便, 选一对主导极点 s_1, s_2 , 另外一个为可忽略影响的远



极点。由第三章，上述指标计算公式如下：

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \omega_b = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} + \sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}$$

式中， ζ 和 ω_n 分别为阻尼比和自然频率。将上述数据代入，从前两个指标可以分别求出： $\zeta \approx 0.707$ $\omega_n \approx 9.0$ ；代入带宽公式，可求得 $\omega_b = 9.0$ ；综合考虑响应速度和带宽要求，取 $\omega_n = 10$ 。于是，闭环主导极点为 $s_{1,2} = -7.07 \pm j7.07$ ，取非主导极点为 $s_3 = -10\omega_n = -100$ 。

3) 确定状态反馈矩阵 k

状态反馈系统的特征多项式为

$$|\lambda - (A - bk)| = (\lambda + 100)(\lambda^2 + 14.1\lambda + 100) = \lambda^3 + 114.1\lambda^2 + 1510\lambda + 10000$$

由此，状态反馈矩阵 $k = [\bar{a}_0 - a_0 \quad \bar{a}_1 - a_1 \quad \bar{a}_2 - a_2] = [10000 \quad 1438 \quad 96.1]$



4) 确定输入放大系数

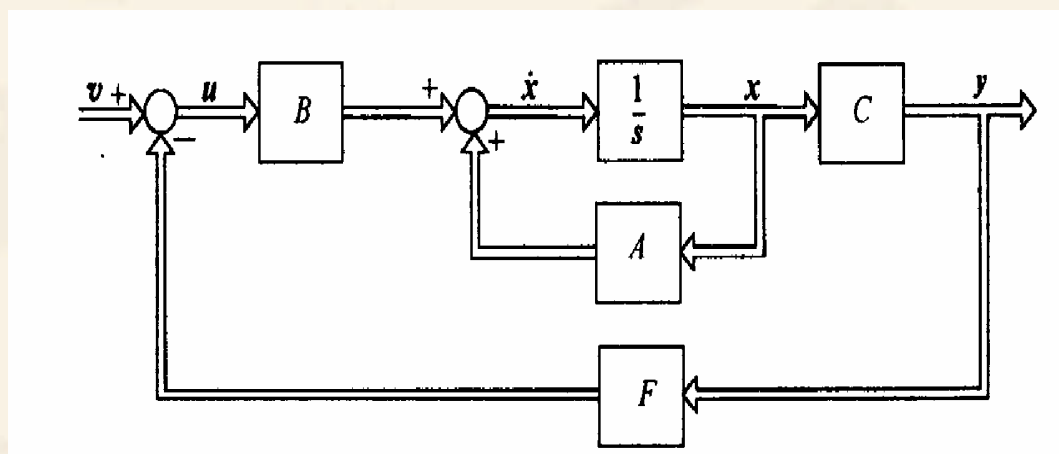
状态反馈系统闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{A_v}{(s+100)(s^2+14.1s+100)} = \frac{A_v}{s^3+114.1s^2+1510s+10000}$$

因此由 $e_p = 0$ ，可以求出 $A_v = 10000$

§ 6.2 输出反馈与极点配置

§ 6.2.1 输出反馈至控制输入



输出反馈至控制输入



原系统 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$

如上页图所示，闭环系统 $\dot{x} = (A - BhC)x + Bu, y = Cx$

其中 $u = v - hy$

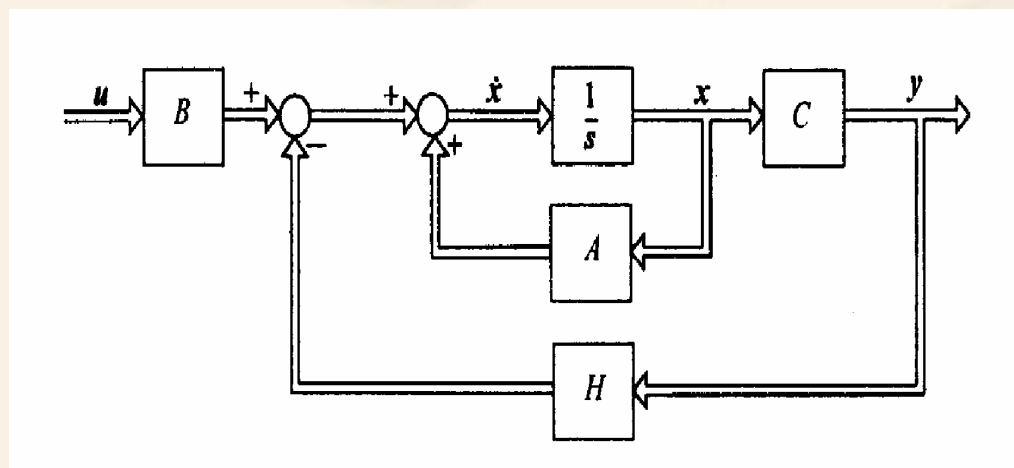
式中， h 为 $(n \times 1)$ 输出反馈阵。

注意：

输出至输入的反馈不会改变原系统的可控性和可观测性。只要输出是仪器传感器测得，系统总是可以实现的。

原系统

§ 6.2.1 输出反馈至状态微分处



输出反馈至状态微分处



原系统 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$

如上页图所示，闭环系统 $\dot{x} = (A - hC)x + Bu, y = Cx$

式中， h 为 $(n \times 1)$ 输出反馈阵

输出反馈至状态微分处 设计定理：

定理 用输出至状态微分的反馈任意配置闭环极点的充要条件是系统可观测

提示：此定理可用对偶定理来证明。

定理的证明也可以用与状态反馈配置极点定理证明类似的步骤进行。



§ 6.3 状态重构与状态观测器设计

[首页](#)
[跳转](#)
[退出](#)

反馈控制类型（方法）	反馈控制能力	反馈设计可实现性	闭环极点任意配置条件
状态反馈至状态微分处	很强	极差	无
状态反馈至控制输入处	强	差	系统可控
输出反馈至控制输入处	强	差	系统可观
输出反馈至状态微分处	弱	好	可控可观+足够的输入与输出，一般情况不能任意配置极点
输出到状态观测器再到控制输入	强	好	系统可控可观

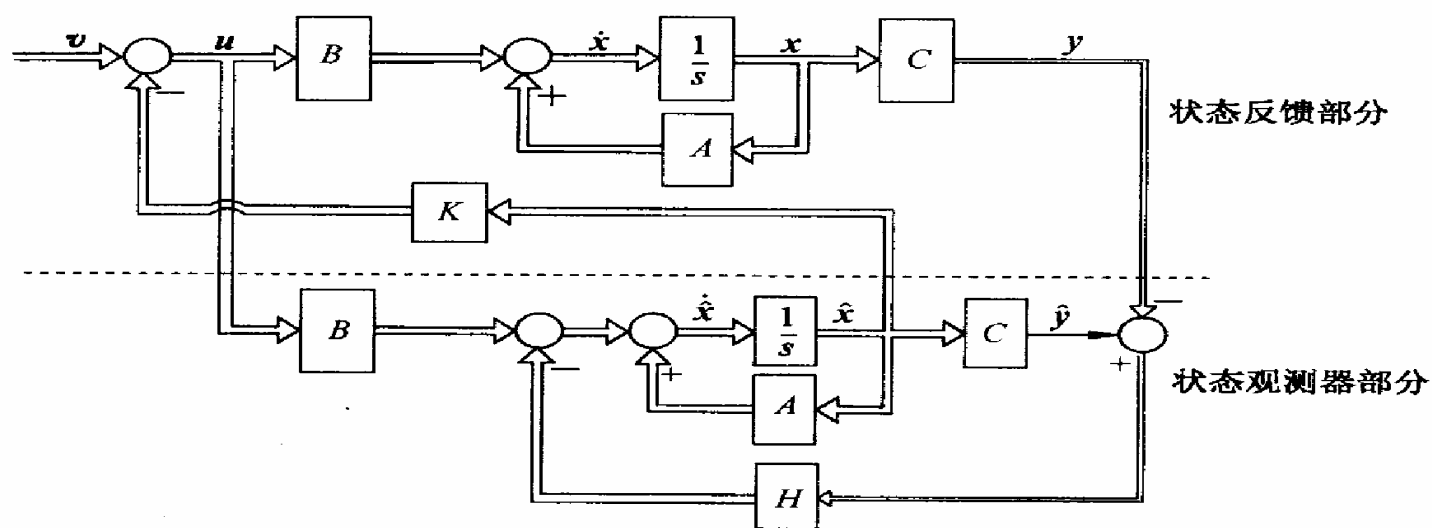
注意：从输出引反馈信号和从输入引反馈信号总是可行的。



§ 6.3.1 全维状态观测器及其状态反馈系统组成结构

原系统 $\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$

模拟系统 $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu, \quad \hat{y} = C\hat{x}$



(6-2) 用全维状态观测器实现状态反馈原理

设计原理:

设计H阵, 将 $\hat{y} - y$ 反馈引入状态观测器, 使 $\hat{y} - y$ 和 $\hat{x} - x$ 尽快衰减至零。



由图（6—2），全维状态观测器状态方程为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - H(\hat{y} - y), \hat{y} = C\hat{x}$$

故有，

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu - HC(\hat{x} - x), \hat{y} = C\hat{x} \\ &= (A - HC)\hat{x} + Bu + Hy\end{aligned}$$

式中， $(A - HC)$ 称为观测器系统矩阵， H 为 $n \times q$ 维矩阵。为了保证状态反馈系统正常工作，必须满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x} - x) = 0$$

状态误差向量 $\hat{x} - x$ 的状态方程为 $\dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - HC)(x - \hat{x})$

其解为

$$x - \hat{x} = e^{(A - HC)(t - t_0)} [x(t_0) - \hat{x}(t_0)]$$



当 $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ 时，恒有 $\hat{x}(t) = x(t)$ ，输出反馈不起作用；当 $\hat{x}(t) \neq x(t)$ 时， $\hat{x}(t) \neq x(t)$ 有

输出反馈便起作用，这时只要观测器的极点具有负实部，状态误差向量总会按指数衰减，衰减速率取决于观测器的极点配置。

提示：设计过程与方法与输出反馈到状态微分的系统相同

设计定理

若系统 (A, B, C) 可观测，则可用全维观测器

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - HC(\hat{x} - x) = (A - HC)\hat{x} + Bu - Hy$$

来给出状态估值，矩阵 H 可按极点配置的需要来设计，以决定状态估计误差衰减的速率。实际选择 H 阵参数时，既要防止状态反馈失真，又要防止数值过大导致饱和效应和噪声加剧等，通常希望观测器的响应速度比状态反馈系统的响应速度快 3~10 倍为好。



例8-49 设受控对象传递函数为 $\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$ ，试设计全维状态观测器，将其极点配置在 $-10, -10$ 。

解 该单输入—单输出系统传递函数无零极点对消，故系统可控可观测。若写出其可控标准型实现，则有

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = [2 \quad 0]$$

由于 $n=2, q=1$ ，输出反馈 H 为 (2×1) 矩阵。全维观测器的系统矩阵为

$$A - HC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} [2 \quad 0] = \begin{bmatrix} -2h_0 & 1 \\ -2-2h_1 & -3 \end{bmatrix}$$

观测器的特征方程为

$$|\lambda I - (A - HC)| = \lambda^2 + (2h_0 + 3)\lambda + (6h_0 + 2h_1 + 2) = 0$$

期望特征方程为

$$(\lambda + 10)^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100 = 0$$

由特征方程同幂系数相等可得 $h_0 = 8.5, h_1 = 23.5$

h_0, h_1 分别为由 $(\hat{y} - y)$ 引至 $\dot{\hat{x}}_1, \dot{\hat{x}}_2$ 的反馈系数。一般来说，如果给定的系统模型是传递函数，建议按可观标准型实现较好，这样观测器的极点总可以任意配置，从而达到满意的效果，若用可控标准型实现，则观测器设计往往会失败。



§ 6.3.3 状态重构反馈系统分析与设计

[首页](#)[跳转](#)[退出](#)

状态反馈子系统的动态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax - BK\hat{x} + Bv$$

$$y = Cx$$

全维状态观测器子系统的动态方程为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - H(\hat{y} - y) = (A - BK - HC)\hat{x} + HCx + Bv$$

故复合系统动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A - BK - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

由于, $\dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - HC)(x - \hat{x})$ 且 $\dot{x} = Ax - BK\hat{x} + Bv = (A - BK)x + BK(x - \hat{x})$

可以得到复合系统的另外一种形式。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$
$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} \quad (6-3)$$



由式 (6-3) , 可以导出复合系统传递函数矩阵 为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - (A - BK) & BK \\ 0 & sI - (A - HC) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

利用分块矩阵求逆公式

$$\begin{bmatrix} R & S \\ 0 & T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} & -R^{-1}ST^{-1} \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix}$$

则 $G(s) = C[sI - (A - BK)]^{-1} B$ (6-3)

式 (6-3) 右端正是引入真实状态 x 作为反馈的状态反馈系统

$$\dot{x} = Ax + B(v - Kx) = (A - BK)x + Bv$$

$$y = Cx$$

的传递函数矩阵。该式表明复合系统与状态反馈系统具有相同的传递特性, 与观测器的部分无关, 可用估值状态 $\hat{x}$ 代替真实状态 x 作为反馈。从 $2n$ 维复合系统导出了 $(n \times n)$ 传递函数矩阵, 这是由于 $(x - \hat{x})$ 不可控造成的。

复合系统的特征值多项式为

$$\begin{bmatrix} sI - (A - BK) & BK \\ 0 & sI - (A - HC) \end{bmatrix} = |sI - (A - BK)| \cdot |sI - (A - HC)|$$



该式表明复合系统特征值是由状态反馈子系统和全维状态观测器的特征值组合而成的，且两部分特征值相互独立，彼此不受影响，因而状态反馈矩阵 K 和输出反馈矩阵 H ，可根据各自的要求来独立进行设计，故有(A,B,C)定理。

设计定理 若受控系统 S 可控可观，用状态观测器估值形成状态反馈时，其系统的极点配置和观测器设计可分别独立进行。即 K 与 H 的设计可分别独立进行。

§ 6.4 降维状态观测器的概念

当状态观测器估计状态向量维数小于受控对象状态向量维数时，称为降维状态观测器。

使用场合：

一是系统不可观测；二是不可控系统的状态反馈控制设计；三是希望简化观测器的结构或减小状态估计的计算量。

例8-50 已知 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$ 和 $y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ，试设计特征值为 -2

的降维状态观测器。

解 (1) 检查受控系统可观测性

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

系统不可观测，实际上正是 x_1 不可观测。

(2) 考虑到 $x_2 = y$ 可通过测量得到，故设计一维状态观测器

(3) 将 $z = \dot{y} - y = \dot{x}_2 - x_2 = x_3$ 作为观测量，得到降维观测器动态方程为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_3 \\ z = \hat{x}_3 \end{cases}$$

(4) 由观测器特征方程 $|\lambda - (1 - h)| = \lambda + 2$ ，得到 $h = 3$ 。
故降维观测器动态方程最后为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_3 = -2\hat{x}_3 \\ z = \hat{x}_3 \end{cases}$$

(5) 如果要进行状态反馈，则可用 $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}$ 作原系统状态反馈的状态信息。即

$$u = v - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = v - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} - y \end{bmatrix}$$

注意：在本题中，可观测子系统的观测值不是由传感器直接测量得到，而是根据传感器的测量值计算出来的。请读者自己考虑闭环状态反馈系统的控制器设计问题。

本课程到此结束，谢谢使用。

